

Lektion, VECKA 2

Sketch of the solutions

DISCLAIMER:

- These are only a sketch of the solutions. For the details, you are supposed to attend "lektion" and ask directly to the teachers.
- I have written this file very quickly, copying from my notes.
- There might be mistakes (if you find an error, let me know).
- The language is poor: it is a mix of poor Swedish and English.

(1) Betrakta följande vektorfält (i ett kartesiskt koordinatsystem):

$$\vec{A} = (3z + y^2 z^3 + 2x, 2xyz^3, 3x + 3xy^2 z^2)$$

$$\vec{B} = (x^2 z - 2, yz, x + z)$$

(a) Kan de ha en skalärpotential?

(b) beräkna potentialen (om det finns)

Lösning:

$$\vec{A} = (3z + y^2 z^3 + 2x, 2xyz^3, 3x + 3xy^2 z^2)$$

(a) Sats 5.1

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_x}{\partial y} &= 2yz^3 \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} &= 2yz^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_y}{\partial z} &= 6xyz^2 \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} &= 6xyz^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial x} &= 3 + 3y^2 z^2 \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} &= 3 + 3y^2 z^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial z}$$

Så, det kan ha en potential

(b)

$$\vec{A} = (3z + y^2 z^3 + 2x, 2xyz^3, 3x + 3xy^2 z^2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = A_x = 3z + y^2 z^3 + 2x \Rightarrow \phi = 3xz + xy^2 z^3 + x^2 + F(y, z)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 2xyz^3 + \frac{\partial F(y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= A_y = 2xyz^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial F(y, z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow F(y, z) = G(z)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 3x + 3xy^2 z^2 + \frac{\partial G(z)}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= A_z = 3x + 3xy^2 z^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial G(z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow F(y, z) = G(z) = c \quad (\text{en konstant})$$

$$\phi(\vec{r}) = 3xz + xy^2 z^3 + x^2 + c$$

$$\vec{B} = (x^2 z - 2, yz, x + z)$$

(a) Sats 5.1

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial z} &= y \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial z} \neq \frac{\partial B_z}{\partial y}$$

Det kan inte ha en potential

(2) Ett vektorfält och en kurva definieras av:

$$\vec{A} = ye^z \hat{e}_x + \frac{y^2}{x} \hat{e}_y + ze^y \hat{e}_z$$

$$L = \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ z = 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

(a) Beräkna linjeintegralen av vektorfältet längs kurvan.

(b) Är linjeintegralen positiv eller negativ? Motivera.

Lösning:

För att beräkna linjeintegralen kan vi använda (6.11):

$$\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \bar{A}(\bar{r}(\varphi)) \cdot \frac{d\bar{r}}{d\varphi} d\varphi$$

Vi behöver beräkna en parametrisering $\bar{r}(\varphi)$ av kurvan och därefter derivatan $d\bar{r}(\varphi)/d\varphi$.

Vi inleder med parametriseringen av kurvan. Kurvan ligger i $z = 0$ planet, så ekvationen blir

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{med} \quad y > 0$$

Detta är ekvationen för en ellips med axlarna 2 och 4. Vi skriver $x = 2\cos\varphi$, $y = 4\sin\varphi$.

Eftersom $y > 0$ måste vi ha $\varphi: 0 \rightarrow \pi$ eller $\varphi: \pi \rightarrow 0$ (det beror på kurvans orientering).

Parametriseringen blir

$$L: \begin{cases} \bar{r}(\varphi) = 2\cos\varphi \hat{e}_x + 4\sin\varphi \hat{e}_y \\ \varphi: 0 \rightarrow \pi \text{ eller } \varphi: \pi \rightarrow 0 \end{cases}$$

Derivatan är

$$\frac{d\bar{r}(\varphi)}{d\varphi} = -2\sin\varphi \hat{e}_x + 4\cos\varphi \hat{e}_y$$

Eftersom parametriseringen av kurvan ger $x = 2\cos\varphi$, $y = 4\sin\varphi$, $z = 0$ kan vektorfältet skrivas som

$$\bar{A} = ye^z \hat{e}_x + \frac{y^2}{x} \hat{e}_y + ze^y \hat{e}_z = 4\sin\varphi \hat{e}_x + 8 \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} \hat{e}_y$$

Då fås linjeintegralen

$$\begin{aligned} \int_L \bar{A} \cdot d\bar{r} &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \bar{A}(\bar{r}(\varphi)) \cdot \frac{d\bar{r}}{d\varphi} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(4\sin\varphi, 8 \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}, 0 \right) \cdot (-2\sin\varphi, 4\cos\varphi, 0) d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (-8\sin^2\varphi + 32\sin^2\varphi) d\varphi = 24 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2\varphi d\varphi \end{aligned}$$

Eftersom $\varphi: 0 \rightarrow \pi$ eller $\varphi: \pi \rightarrow 0$ (det beror på orienteringen av kurvan) kan φ_1 och φ_2 vara $\varphi_1 = 0$ och $\varphi_2 = \pi$ eller $\varphi_1 = \pi$ och $\varphi_2 = 0$. Så integralen kan vara positiv eller negativ;

$$\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = 24 \int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi = 24 \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^\pi = 12\pi$$

eller

$$\int_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = 24 \int_\pi^0 \sin^2\varphi d\varphi = 24 \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_\pi^0 = -12\pi$$

Tecknet beror av kurvans orientering.

(3) Beräkna följande linjeintegral (alla vektorer definieras i ett kartesiskt koordinatsystem):

$$\int_L \bar{F} \cdot d\bar{r} \quad \text{med} \quad \bar{F} = (yz, xz, xy)$$

och

$$L : \begin{cases} \vec{r}(\varphi) = \left(a \cos \varphi, \quad b \sin \varphi, \quad c \sinh\left(\frac{\varphi}{\pi}\right) \right) \\ \text{från punkten } P_1 : (a, 0, 0) \\ \text{till punkten } P_2 : \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}, c \sinh\left(\frac{5}{4}\right) \right) \end{cases}$$

LÖSNING:

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{F}(\vec{r}(\varphi)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi} d\varphi$$

$$\vec{F} = \left(bc \sin \varphi \sinh\left(\frac{\varphi}{\pi}\right), ac \sinh\left(\frac{\varphi}{\pi}\right) \cos \varphi \sinh\left(\frac{\varphi}{\pi}\right), ab \cos \varphi \sin \varphi \right)$$

$$\frac{d\vec{r}(\varphi)}{d\varphi} = \left(-a \sin \varphi, \quad b \cos \varphi, \quad \frac{c}{\pi} \cosh\left(\frac{\varphi}{\pi}\right) \right)$$

$$\begin{aligned} \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{5\pi/4} \left(bc \sin \varphi \sinh\left(\frac{\varphi}{\pi}\right), ac \sinh\left(\frac{\varphi}{\pi}\right) \cos \varphi \sinh\left(\frac{\varphi}{\pi}\right), ab \cos \varphi \sin \varphi \right) \\ &\quad \cdot \left(-a \sin \varphi, \quad b \cos \varphi, \quad \frac{c}{\pi} \cosh\left(\frac{\varphi}{\pi}\right) \right) d\varphi \end{aligned}$$

If you continue, you will end up with an integral that is too difficult to solve.

It is wiser to use another method: check if the field is conservative and then calculate the potential and calculate the integral with theorem 6.4

The field has the potential $\phi = xyz + c$

So, the integral is:

$$\int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(P_2) - \phi(P_1) = \frac{abc}{2} \sinh \frac{5}{4}$$

(4) Vattenhastigheten i en flod beskrivs av vektorfältet:

$$\vec{v} = (1 - y^2) \hat{e}_x + (1 - z) \hat{e}_y$$

Beräkna flödet av vatten genom ett fisknät med formen definierad av

$$S : \begin{cases} z^2 + y^2 = 1 - x \\ x > 0 \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_x > 0 \end{cases}$$

LÖSNING:

Först bestämmer vi parametrisering. Om vi använder parametriseringen $y = \rho \cos \theta$ och $z = \rho \sin \theta$ fås

$$x = 1 - z^2 - y^2 = 1 - \rho^2$$

Eftersom $x > 0$ har vi $\rho: 0 \rightarrow 1$ och $\theta: 0 \rightarrow 2\pi$. En parametrisering blir

$$S: \begin{cases} \vec{r}(\rho, \theta) = (1 - \rho^2) \hat{e}_x + \rho \cos \theta \hat{e}_y + \rho \sin \theta \hat{e}_z \\ \rho: 0 \rightarrow 1 \\ \theta: 0 \rightarrow 2\pi \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_x > 0 \end{cases}$$

Vi kan nu beräkna normalen $\vec{n} = \partial \vec{r} / \partial \rho \times \partial \vec{r} / \partial \theta$. Med användning av parametriseringen fås

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= (-2\rho \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y + \sin \theta \hat{e}_z) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= (-\rho \sin \theta \hat{e}_y + \rho \cos \theta \hat{e}_z) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \rho \hat{e}_x + 2\rho^2 \cos \theta \hat{e}_y + 2\rho^2 \sin \theta \hat{e}_z$$

Vi kan notera att y-komponenten av normalen, $\vec{n} \cdot \hat{e}_x = \rho$, alltid är positiv, som orienteringen av ytan.

Om vi använder parametriseringen kan vektorfältet skrivas som

$$\vec{v}(\rho, \theta) = (1 - \rho^2 \cos^2 \theta) \hat{e}_x + (1 - \rho \sin \theta) \hat{e}_y$$

Nu kan vi beräkna integralen. Notera att vi integrerar över S , därför är x-komponenten av normalen positiv, som orienteringen av ytan.

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} &= \iint_S \vec{v}(\vec{r}(\rho, \theta)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) d\rho d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho - \rho^3 \cos^2 \theta + 2\rho^2 \cos \theta - 2\rho^3 \sin \theta \cos \theta) d\theta d\rho = \frac{3}{4} \pi \end{aligned}$$

(5) Beräkna cirkulationen av vektorfältet:

$$\vec{A} = -2xy \hat{e}_x + xy \hat{e}_y$$

längs vägen L definierad av:

$$L = \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ z + y = 1 \end{cases}$$

Orienteringen av L i punkten $x=2, y=0, z=1$ är $-\hat{e}_y$.

Lösning:

För att beräkna linjeintegralen kan vi använda (6.11);

$$\int_L \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{A}(\vec{r}(\varphi)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi} d\varphi$$

Vi behöver beräkna en parametrisering $\vec{r}(\varphi)$ av kurvan och sedan derivatan $d\vec{r}(\varphi)/d\varphi$. Vi börjar med parametriseringen av kurvan. Den blir enklare om vi gör följande translation:

$$x' = x - 1$$

Linjeintegralen blir

$$\vec{A} = -2(x'+1)y\hat{e}_x + (x'+1)y\hat{e}_y$$

$$L = \begin{cases} x'^2 + y^2 = 1 \\ z + y = 1 \end{cases}$$

Vi kan använda cylindriska koordinater:

$$\begin{cases} x' = \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \\ z = 1 - \sin \varphi \end{cases}$$

$$\vec{r}(\varphi) = \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y + (1 - \sin \varphi) \hat{e}_z$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y - \cos \varphi \hat{e}_z$$

Orienteringen i punkten $x' = 1, y = 0, z = 1$ är $-\hat{e}_y$, så $\varphi: 2\pi \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \int \vec{A}(\varphi) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi} d\varphi &= \int_{2\pi}^0 (-2 \cos \varphi \sin \varphi - 2 \sin \varphi, \cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi, 0) \cdot (-\sin \varphi, \cos \varphi, -\cos \varphi) d\varphi = \\ &= \int_{2\pi}^0 (2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi + \cos \varphi^2 \sin \varphi + \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \underbrace{\int_{2\pi}^0 2 \cos \varphi \sin^2 \varphi d\varphi}_{=0} + \underbrace{\int_{2\pi}^0 2 \sin^2 \varphi d\varphi}_{=0} + \underbrace{\int_{2\pi}^0 \cos \varphi^2 \sin \varphi d\varphi}_{=0} + \underbrace{\int_{2\pi}^0 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi}_{=0} = \\ &= 2 \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{2\pi}^0 = -2\pi \end{aligned}$$

(6) Beräkna flödet av vektorfältet

$$\vec{A} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + \ln\left(\frac{x}{y-1}\right) \hat{e}_z$$

genom ytan definierad av

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y > 0 \\ |z| < 1 \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_y < 0 \end{cases}$$

Lösning

Först bestämmer vi parametrisering. Om vi använder $x = 2\cos\varphi$ och $z = u$ får vi

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2/4} = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \pm\sin \varphi$$

Eftersom $y > 0$ använder vi endast positivt tecken, $y = \sin \varphi$ med $\varphi: 0 \rightarrow \pi$ och $u: -1 \rightarrow 1$. Parametriseringen blir

$$S: \begin{cases} \bar{r}(\varphi, u) = 2 \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y + u \hat{e}_z \\ \varphi: 0 \rightarrow \pi \\ u: -1 \rightarrow 1 \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_y < 0 \end{cases}$$

Vi kan nu beräkna normalen $\bar{n} = \partial \bar{r} / \partial \varphi \times \partial \bar{r} / \partial u$. Med användning av parametriseringen fås

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} &= -2 \sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} &= \hat{e}_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \cos \varphi \hat{e}_x + 2 \sin \varphi \hat{e}_y$$

Vi kan notera att y -komponenten av normalen, $\bar{n} \cdot \hat{e}_y = 2 \sin \varphi$, alltid är positiv, men att ytan definieras med negativ y -komponent av normalen. Vi måste komma ihåg det vid beräkning av integralen.

Om vi använder parametriseringen kan vektorfältet skrivas som

$$\bar{A}(\varphi, u) = 2 \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y + \ln \frac{2 \cos \varphi}{\sin \varphi - 1} \hat{e}_z$$

Nu kan vi beräkna integralen. Notera att vi integrerar över $-S$, inte över S , därför är y -komponenten av normalen negativ istället för positiv.

$$\begin{aligned} \iint_{-S} \bar{A} \cdot d\bar{S} &= \iint_{-S} \bar{A}(\varphi, u) \cdot \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right) d\varphi du = \\ &= - \int_0^\pi \int_{-1}^1 (2 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi) du d\varphi = -2 \int_0^\pi d\varphi \int_{-1}^1 du = -4\pi \end{aligned}$$

(7) Betrakta följande ytan

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -1 < z < 1 \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_x > 0 \quad \text{i} \quad x=1, y=0, z=0 \end{cases}$$

och vektorfältet $\bar{A} = \rho \hat{e}_\rho + \hat{e}_\varphi$ (i ett cylindriskt koordinatsystem). Beräkna integralen

$$\iint_S \bar{A} \times d\bar{S}$$

Du kan använda två metoder: (1) skriv en parametrisering av ytan i ett kartesiskt koordinatsystem och (2) skriv en parametrisering av ytan i ett cylindriskt koordinatsystem.

Lösning

Vi ska beräkna

$$\iint_S \bar{A} \times d\bar{S} = \iint_S \bar{A}(u, v) \times \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right) du dv$$

i ett kartesiskt koordinatsystem.

Vi kan använda $x = \cos\varphi$ och $z = u$, så vi har $y = \sin\varphi$. En parametrisering är

$$S: \begin{cases} \bar{r}(u, \varphi) = \cos\varphi \hat{e}_x + \sin\varphi \hat{e}_y + u\hat{e}_z \\ u: -1 \rightarrow 1 \\ \varphi: 0 \rightarrow 2\pi \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_x > 0 \text{ i punkten } x=1, y=0, z=0 \end{cases}$$

Därefter kan vi beräkna normalen $\bar{n} = \partial\bar{r}/\partial\varphi \times \partial\bar{r}/\partial u$. Med användning av parametriseringen fås

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi} &= -\sin\varphi \hat{e}_x + \cos\varphi \hat{e}_y \\ \frac{\partial\bar{r}}{\partial u} &= \hat{e}_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\bar{r}}{\partial u} = \cos\varphi \hat{e}_x + \sin\varphi \hat{e}_y$$

Vi kan notera att x-komponenten av normalen, $\bar{n} \cdot \hat{e}_x = \cos\varphi$, är positiv i $(1, 0, 0)$, som orienteringen av ytan.

Om vi använder (3.5) kan vi skriva vektorfältet som (med användning av att $\rho = 1$)

$$\bar{A} = \hat{e}_\rho + \hat{e}_\varphi = (\cos\varphi - \sin\varphi)\hat{e}_x + (\sin\varphi + \cos\varphi)\hat{e}_y$$

Kryssprodukten blir

$$\bar{A}(\varphi, u) \times \left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\bar{r}}{\partial u} \right) = ((\cos\varphi - \sin\varphi)\hat{e}_x + (\sin\varphi + \cos\varphi)\hat{e}_y) \times (\cos\varphi \hat{e}_x + \sin\varphi \hat{e}_y) = -\hat{e}_z$$

Nu kan vi beräkna integralen. Notera att vi integrerar över S eftersom x-komponenten av normalen är positiv, som orienteringen av ytan.

$$\begin{aligned} \iint_S \bar{A} \times d\bar{S} &= \iint_S \bar{A}(\bar{r}(\varphi, u)) \times \left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\bar{r}}{\partial u} \right) d\varphi du \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} (-\hat{e}_z) d\varphi du = -\hat{e}_z \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} d\varphi du = -4\pi \hat{e}_z \end{aligned}$$

Beräkning i ett cylindriskt koordinatsystem.

Ytan är en cylinder med radie $\rho = 1$. Ortsvektorn i ett cylindriskt koordinatsystem är $\bar{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$.

Eftersom $\rho = 1$ fås, om vi använder $z = u$

$$S: \begin{cases} \bar{r}(u, \varphi) = \hat{e}_\rho + u\hat{e}_z \\ u: -1 \rightarrow 1 \\ \varphi: 0 \rightarrow 2\pi \\ \hat{n} \cdot \hat{e}_x > 0 \text{ i punkten } x=1, y=0, z=0 \end{cases}$$

Vi kan nu beräkna normalen $\bar{n} = \partial\bar{r}/\partial\varphi \times \partial\bar{r}/\partial u$. Med användning av parametriseringen har vi (se Exempel 3.7 för derivering av $\hat{e}_\rho$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi} &= \frac{\partial\hat{e}_\rho}{\partial\varphi} = \hat{e}_\varphi \\ \frac{\partial\bar{r}}{\partial u} &= \hat{e}_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial\bar{r}}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\bar{r}}{\partial u} = \hat{e}_\varphi \times \hat{e}_z = \hat{e}_\rho$$

Vi noterar att x-komponenten av normalen, $\bar{n} \cdot \hat{e}_x = \cos\varphi$, är positiv i punkten $(1, 0, 0)$, som orienteringen av ytan.

Kryssprodukten blir

$$\bar{A}(\varphi, u) \times \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right) = (\hat{e}_\rho + \hat{e}_\varphi) \times \hat{e}_\rho = -\hat{e}_z$$

Nu kan vi beräkna integralen. Notera att vi integrerar över S , därför är x-komponenten av normalen positiv, som orienteringen av ytan.

$$\begin{aligned} \iint_S \bar{A} \times d\bar{S} &= \iint_S \bar{A}(\bar{r}(\varphi, u)) \times \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right) d\varphi du \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} (-\hat{e}_z) d\varphi du = -\hat{e}_z \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} d\varphi du = -4\pi \hat{e}_z \end{aligned}$$

(8) En halv sfärisk yta S med radie R ligger på vatten. Vattentrycket kan beskrivas av $= -\rho_m g z$ (med ρ_m vattnets masstäthet och g tyngdaccelerationen). Beräkna kraften $\bar{F}_0$ för att hålla ytan strax under vatten. Anta att ytans massa är noll. Kraften av vattentrycket på ytan kan beräknas av:

$$\bar{F} = - \iint_S p d\bar{S}$$

Lösning

Kraften från vattentrycket är $\bar{F} = - \iint_S p d\bar{S}$. Så, kraften $\bar{F}_0$ för att hålla ytan strax under vatten är $\bar{F}_0 = -\bar{F} = \iint_S p d\bar{S}$, där S utgör hela ytan. Integralen är

$$\bar{F}_0 = -\bar{F} = \iint_S (-\rho_m g z) d\bar{S} = -\rho_m g \iint_S z d\bar{S}$$

För att beräkna integralen parametriserar vi först ytan.

$$\begin{aligned} \bar{r}(\theta, \varphi) &= R \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + R \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + R \cos \theta \hat{e}_z \\ S: \begin{cases} \theta: \pi/2 \rightarrow \pi \\ \varphi: 0 \rightarrow 2\pi \end{cases} \\ \left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} &= R \cos \theta \cos \varphi \hat{e}_x + R \cos \theta \sin \varphi \hat{e}_y - R \sin \theta \hat{e}_z \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} &= -R \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_x + R \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} &= R^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z) \\ z &= R \cos \theta \end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned} \iint_S z d\bar{S} &= R^3 \iint_S \cos \theta \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z) d\varphi d\theta \\ &= R^3 \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z) d\varphi d\theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R^3 \hat{e}_x \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^2 \theta \cos \varphi d\varphi d\theta}_{=0} + R^3 \hat{e}_y \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^2 \theta \sin \varphi d\varphi d\theta}_{=0} + \\
&\quad + R^3 \hat{e}_z \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\varphi d\theta = \\
&= 2\pi R^3 \hat{e}_z \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2\pi R^3 \hat{e}_z \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{3} \pi R^3 \hat{e}_z
\end{aligned}$$

Därför är kraften

$$\bar{F}_0 = -\frac{2}{3} \pi \rho_m R^3 g \hat{e}_z$$

Vi ska i Kapitel 15 diskutera en enklare metod för att lösa liknande problem.