

LEKTION, VECKA 1

Sketch of the solutions

DISCLAIMER:

- These are only a sketch of the solutions. For the details, you are supposed to attend "lektion" and ask directly to the teachers.
- I have written this file very quickly, copying from my notes.
- There might be mistakes (if you find an error, let me know).
- The language is poor: **it is a mix of poor Swedish and English.**

(1) Beräkna följande produkter (med $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\varphi$ och $\hat{e}_\theta$ basvektorer i ett sfäriskt koordinatsystem och $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$ basvektorer i ett Kartesiskt koordinatsystem)

(a) $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_y$

(b) $\hat{e}_z \cdot \hat{e}_r$

(c) $\hat{e}_r \cdot (\hat{e}_x + 2\hat{e}_y)$

LÖSNING

- (a) Skalarprodukten av en vektor $\vec{v}$ med $\hat{e}_y$ är $\vec{v}$ -komponenten längs y -axeln, v_y . Så, vi måste uttrycka y -komponenten av $\hat{e}_r$. Vi skulle kunna använda uttryck (3.13), men det är enklare om vi uttrycker $\hat{e}_r$ med x, y, z variabler. Vi har

$$\hat{e}_r = \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}{r}$$

Så,

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_y = \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}{r} \cdot \hat{e}_y = \frac{y}{r}$$

- (b) Vi kan uttrycka $\hat{e}_r$ med x, y, z variabler som i övning 3.13(a). Vi har

$$\hat{e}_z \cdot \hat{e}_r = \hat{e}_z \cdot \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}{r} = \frac{z}{r}$$

- (c) Först, vi kan utveckla skalarprodukten

$$\hat{e}_r \cdot (\hat{e}_x + 2\hat{e}_y) = \hat{e}_r \cdot \hat{e}_x + 2\hat{e}_r \cdot \hat{e}_y$$

Sen vi kan använda samma logik som i övningar 3.13(a) och 3.13(b)

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_x = \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}{r} \cdot \hat{e}_x = \frac{x}{r}$$

$$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_y = \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}{r} \cdot \hat{e}_y = \frac{y}{r}$$

Så

$$\hat{e}_r \cdot (\hat{e}_x + 2\hat{e}_y) = \frac{x}{r} + 2\frac{y}{r} = \frac{x+2y}{r}$$

(2) Beräkna i ett cylindriskt koordinatsystem följande integraler

$$(a) \int_0^1 \rho \cos \varphi \hat{e}_\varphi d\rho$$

$$(b) \int_0^\pi \rho \cos \varphi \hat{e}_\varphi d\varphi$$

LÖSNING

(a) Basvektorn $\hat{e}_\varphi$ beror inte på ρ -variabeln, så vi kan flytta ut $\hat{e}_\varphi$ utanför integralen

$$\int_0^1 \rho \cos \varphi \hat{e}_\varphi d\rho = \cos \varphi \hat{e}_\varphi \int_0^1 \rho d\rho = \cos \varphi \hat{e}_\varphi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cos \varphi \hat{e}_\varphi$$

(b) Basvektorn $\hat{e}_\varphi$ beror på φ -variabeln, så vi kan inte flytta ut $\hat{e}_\varphi$ utanför integralen men vi måste uttrycka $\hat{e}_\varphi$ med kartesiska basvektorer. Med uttryck (3.5) kan vi skriva

$$\begin{aligned} \hat{e}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y \\ \int_0^\pi \rho \cos \varphi \hat{e}_\varphi d\varphi &= \int_0^\pi \rho \cos \varphi (-\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y) d\varphi \\ &= \rho \int_0^\pi (-\cos \varphi \sin \varphi \hat{e}_x + \cos^2 \varphi \hat{e}_y) d\varphi = \\ &= -\rho \hat{e}_x \int_0^\pi \cos \varphi \sin \varphi d\varphi + \rho \hat{e}_y \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi = \rho \hat{e}_x \underbrace{\left[\frac{\cos^2 \varphi}{2} \right]_0^\pi}_{=0} + \rho \hat{e}_y \underbrace{\left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^\pi}_{=\pi/2} = \frac{\pi}{2} \rho \hat{e}_y \end{aligned}$$

(3) Rita följande skalärfältet

(a) $\phi = z$

(b) $\phi = x + y$

(c) $\phi = x^2 - y^2$

LÖSNING

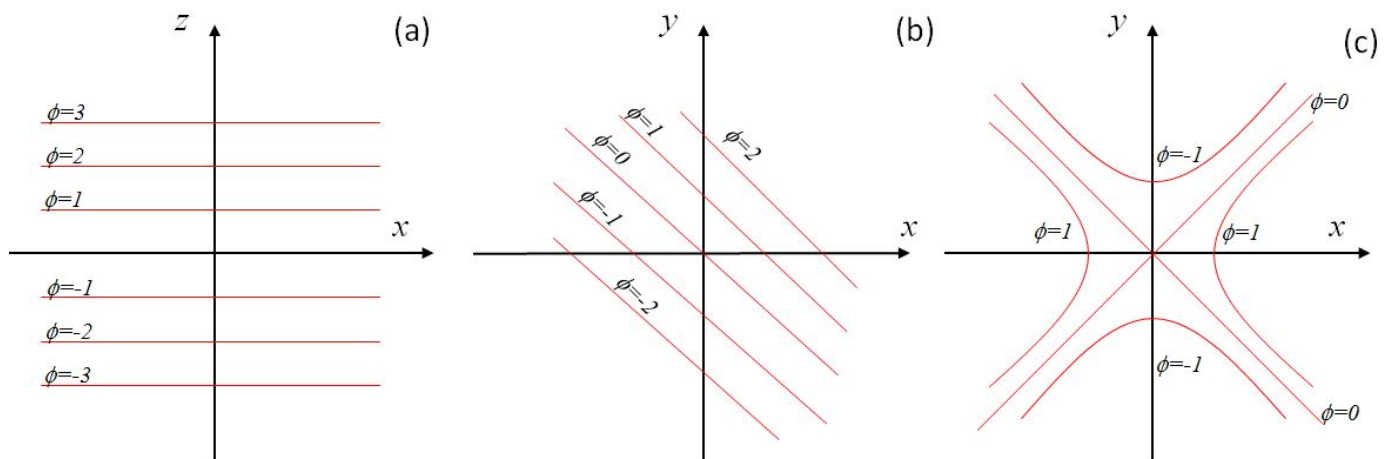
(a) $\phi = z \Rightarrow z = c$

$z = c$ är ekvationerna för plan som är parallella med xy -planet.

(b) $\phi = x + y \Rightarrow x + y = c$

$x + y = c$ är ekvationerna för plan som är parallella med z -axeln och med vinkeln $3\pi/4$ till x -axeln.

(c) $\phi = x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = c \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - c}$.



(4) Beräkna gradienten av skalärfältet $f(x, y, z) = e^{xy} \ln(z)$

LÖSNING

$$\text{grad}(f) = \left(y \ln z, x \ln z, \frac{1}{z} \right) e^{xy}$$

(5) Beräkna ökningen längs riktning $(-1, -1, -1)$ i punkten P: $(1, 1, 1)$ (i kartesiska koordinater) av följande skalärfält:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$f(x, y, z) = e^{-(x^2 + y^2 - z^2)}$$

LÖSNING

$$\frac{d\phi}{ds} = \text{grad}\phi \cdot \hat{e}$$

$$\hat{e} = \frac{(-1, -1, -1)}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &\Rightarrow \text{grad}(f) = \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \\ &= \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \text{grad}(f)|_p &= \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} \\ \frac{d\phi}{ds}\bigg|_p &= \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(-1, -1, -1)}{\sqrt{3}} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = e^{-(x^2 + y^2 - z^2)} &\Rightarrow \text{grad}(f) = e^{-(x^2 + y^2 - z^2)} (-2x, -2y, 2z) \\ \text{grad}(f)|_p &= e^{-1} (-2, -2, 2) \\ \frac{d\phi}{ds}\bigg|_p &= e^{-1} (-2, -2, 2) \cdot \frac{(-1, -1, -1)}{\sqrt{3}} = e^{-1} \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(6) Hitta en parametrisering $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ av ytan $x^2 - 2y^2 - 2z = 0$.

LÖSNING

$$x^2 - 2y^2 - 2z = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{2}x^2 - y^2$$

$$\left. \begin{array}{l} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{2}u^2 - v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{r}(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{2}u^2 - v^2 \right)$$

(7) Betrakta ytan i problem 6. Beräkna:

(a) normalen till ytan i punkten $P: (2,1,1)$

(b) tangentplanet i punkten $P:(2,1,1)$

LÖSNING

(a)

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}(u, v) &= \left(u, v, \frac{1}{2}u^2 - v^2 \right) \\ \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} &= (1, 0, u) \\ \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} &= (0, 1, -2v) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{n} = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} = (-u, 2v, 1)$$

I punkten $P: (2,1,1)$: $u = 2, v = 1$

So, normalen i P är

$$\vec{n} = (-2, 2, 1)$$

(b)

The plane $ax + by + cz + d = 0$ is perpendicular to the vector (a, b, c) .

So, one of these planes:

$$-2x + 2y + z + d = 0$$

is tangent to the surface in P .

We need to calculate the d for which P is on the plane.

If we substitute the coordinates of P in the expression above, we get

$$-4 + 2 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$$

So, the plane is: $-2x + 2y + z + 1 = 0$

(8) Elektrostatiska potentialen V definieras av $\vec{E} = -\text{grad}V$, där $\vec{E}$ är det elektriska fältet. Kraften $\vec{F}$ på en laddning q i ett elektriskt fält $\vec{E}$ är $\vec{F} = q\vec{E}$. I vilken riktning rör sig en laddning q som ligger i punkt $x=1, y=-2, z=1$ om elektrostatiska potentialen är $V = 1/r$ (med r avståndet från origo)?

Beräkna riktningen i ett kartesiskt koordinatsystem och i ett sfäriskt koordinatsystem.

LÖSNING

Laddningen ska röra sig längs riktningen av kraften $\vec{F} = q\vec{E}$, så längs riktningen av det elektriska fältet. Därför måste vi beräkna gradienten av elektrostatiska potentialen, $\vec{F} = -q\text{grad}V$. En positiv laddning ska röra sig i riktningen av största förminsningen av elektrostatiska potentialen.

Potentialen är $V = 1/r$, men vi vet inte hur man kan beräkna gradienten i ett sfäriskt koordinatsystem (Kapitel 10). Så. Vi måste uttrycka r i ett kartesiskt koordinatsystem. Vi har,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\begin{aligned}
\text{grad } V &= \text{grad} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
&= \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\partial z} \hat{e}_z = \\
&= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_x + -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_y + -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_z = \\
&= -\frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Nu kan vi förenkla $\text{grad}V$ om vi noterar att

$$x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z = r\hat{e}_r$$

så, i ett sfäriskt koordinatsystem, vi har

$$\text{grad } V = -\frac{\hat{e}_r}{r^2}$$

I ett kartesiskt koordinatsystem är kraften i punkten $P: (x=1, y=-2, z=1)$

$$\vec{F} = -q \text{grad } V = q \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \Big|_P = q \frac{\hat{e}_x - 2\hat{e}_y + \hat{e}_z}{6\sqrt{6}}$$

I ett sfäriskt koordinatsystem, radien i punkten $P: (x=1, y=-2, z=1)$ är $r = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, så kraften i P är

$$\vec{F} = -q \text{grad } V = q \frac{\hat{e}_r}{r^2} \Big|_P = \frac{q}{6} \hat{e}_r$$

Efter kapitel 10 kan vi lösa övningen med en mycket enklare metod.

(10) En elektrisk ström I går i en cirkulär spole. Spolen har radien r_0 , den har centrum i origo, och ligger i planet $z=0$.

Biot-Savarts lag lyder:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

där $d\vec{l}'$ är ett infinitesimalt längdelement längs spolen (kurvan L), $\vec{r}'$ är en vektor från origo till $d\vec{l}'$, $\vec{r}$ är positionsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\vec{B}$). Beräkna magnetfältet $\vec{B}$ längs z -axeln.

Lösning

Vi börjar skriva i ett cylindriskt koordinatsystem $\bar{r}$, $\bar{r}'$ och $d\bar{l}'$. $d\bar{l}'$ är ett infinitesimalt längdelement längs kurvan, så vi har

$$d\bar{l}' = r_0 d\varphi' \hat{e}_\varphi$$

$\bar{r}'$ är en vektor från origo till $d\bar{l}'$, så

$$\bar{r}' = r_0 \hat{e}_\rho$$

$\bar{r}$ är positionsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\bar{B}$). Eftersom vi vill beräkna $\bar{B}$ längs z -axeln kan vi skriva

$$\bar{r} = z \hat{e}_z$$

Nu kan vi beräkna $\bar{r} - \bar{r}'$ och $|\bar{r} - \bar{r}'|$. Vi har

$$\begin{aligned}\bar{r} - \bar{r}' &= -r_0 \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \\ |\bar{r} - \bar{r}'| &= \sqrt{r_0^2 + z^2} \\ |\bar{r} - \bar{r}'|^3 &= (r_0^2 + z^2)^{3/2}\end{aligned}$$

Den sista steget före integralen är att beräkna kryssprodukten,

$$d\bar{l}' \times (\bar{r} - \bar{r}') = zr_0 d\varphi' \hat{e}_\rho + r_0^2 d\varphi' \hat{e}_z$$

(för detaljer om kryssprodukter i ett cylindriskt koordinatsystem, se sektion 3.3 och övning 3.4).

Nu kan vi skriva integralen

$$\begin{aligned}\bar{B}(\bar{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\bar{l}' \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{zr_0 d\varphi' \hat{e}_\rho + r_0^2 d\varphi' \hat{e}_z}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{zr_0 \hat{e}_\rho}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi' + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 \hat{e}_z}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi' =\end{aligned}$$

För integralerna av basvektorerna kan vi använda samma metoder som i sektion 3.4 och övning 3.6. I sista termen beror inte basvektorn $\hat{e}_z$ på φ' variabeln, så vi kan flytta ut $\hat{e}_z$ utanför integralen. I första termen beror dock $\hat{e}_\rho$ på variabeln φ' , så vi måste integrera $\hat{e}_\rho$.

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{zr_0}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \hat{e}_\rho d\varphi' + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0^2 \hat{e}_z}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' =$$

Vi kan först beräkna integraler som vi gjorde i övning 3.6. Vi kan uttrycka $\hat{e}_\rho$ med kartesiska basvektorer, så vi har $\int_0^{2\pi} \hat{e}_\rho d\varphi' = \int_0^{2\pi} (\cos\varphi' \hat{e}_x + \sin\varphi' \hat{e}_y) d\varphi' = \hat{e}_x \int_0^{2\pi} \cos\varphi' d\varphi' + \hat{e}_y \int_0^{2\pi} \sin\varphi' d\varphi' = \bar{0}$. Slutligen har vi

$$\bar{B}(\bar{r}) = \bar{0} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0^2 \hat{e}_z}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_z$$