

Lektion, VECKA 3

Sketch of the solutions

DISCLAIMER:

- These are only a sketch of the solutions. For the details, you are supposed to attend "lektion" and ask directly to the teachers.
- I have written this file very quickly, copying from my notes.
- There might be mistakes (if you find an error, let me know).
- The language is poor: it is a mix of poor Swedish and English.

PROBLEM (1)

Det finns två villkor som måste uppfyllas för att vi ska kunna använda Gauss sats: (1) ytan måste vara sluten (2) vektorfältet måste vara kontinuerligt deriverbart i volymen innanför ytan.

- (a) Ytan är sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som är sluten.
Vektorfältet är kontinuerligt deriverbart.
Vi kan därmed använda Gauss sats.
- (b) Ytan är en ellipsoid med centrum i origo, så det är en sluten yta.
Vektorfältet är inte kontinuerligt deriverbart i planet $y = 0$. Planet $y = 0$ korsar ytan, så vektorfältet är inte kontinuerligt deriverbart i volymen innanför ytan.
Vi kan alltså inte använda Gauss sats.
- (c) Vi skriver ytan som
Ytan är en ellipsoid med centrum i punkten $x = 0, y = 2, z = 0$. Radien längs y -axeln är 1. Så ytan korsar inte planet $y = 0$.
Vektorfältet är inte kontinuerligt deriverbart i planet $y = 0$. Men planet $y = 0$ korsar inte ytan, så vektorfältet är kontinuerligt deriverbart i volymen innanför ytan.
Vi kan därmed använda Gauss sats.
- (d) Ytan är en sfär med centrum i origo.
Vektorfältet är inte kontinuerligt deriverbart i origo. Så vektorfältet är inte kontinuerligt deriverbart i volymen innanför ytan.
Vi kan alltså inte använda Gauss sats.
- (e) Ytan är en sfär med centrum i punkten $x = 0, y = 0, z = 2$ och radie 1. Så origo ligger inte i ytan.
Vektorfältet är inte kontinuerligt deriverbart i origo. Men origo är inte i ytan, så vektorfältet är kontinuerligt deriverbart i volymen innanför ytan.
Vi kan alltså använda Gauss sats.
- (f) Ytan är en paraboloid, så det är inte en sluten yta. Vi kan inte använda Gauss sats.

PROBLEM (2)

Ytan är sluten och vektorfältet är kontinuerligt deriverbart i volymen innanför ytan. Vi kan därmed använda Gauss sats.

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{A} dV$$

$$\vec{A} = \vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

$$\text{div} \vec{A} = 3$$

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{A} dV = \iiint_V 3 dV = 3 \iiint_V dV$$

Integralen är över volymen innanför ytan. Ytan är en ellipsoid, så $V = \frac{4}{3}\pi abc$. Flödet blir

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = 3V = 4\pi abc$$

PROBLEM (3)

Ytan är sluten och vektorfältet är kontinuerligt deriverbart i volymen innanför ytan. Vi kan alltså använda Gauss sats. Om ytan skissas, inser vi att cylindergeometri kan användas för beräkningen av integralen i Gauss sats om vi gör koordinatbytet $x \rightarrow x$, $y \rightarrow z$ och $z \rightarrow y$. Vi får

$$\vec{A} = x^3 \hat{e}_x + z^3 \hat{e}_z$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial(x^3)}{\partial x} + \frac{\partial(z^3)}{\partial z} = 3(x^2 + z^2)$$

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{A} dV = \iiint_V 3(x^2 + z^2) dV =$$

$$= \{ \text{låt alltså nu } \rho^2 = x^2 + z^2 \text{ och } dV = \rho d\rho dy d\varphi, \text{ med } \rho: 0 \rightarrow \sqrt{y}, y: 0 \rightarrow 1, \varphi: 0 \rightarrow 2\pi \} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} 3\rho^3 d\rho dy d\varphi = 6\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} \rho^3 d\rho dy = 6\pi \int_0^1 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^{\sqrt{y}} dy = \frac{3\pi}{2} \int_0^1 y^2 dy = \frac{\pi}{2}$$

PROBLEM (4)

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{A} dV = \iiint_V 3(x^2 + y^2 + (z-1)^2) dV =$$

$$\{ \text{med } z' = z - 1 \}$$

$$= \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z'^2) dV =$$

$$\{ \text{vi kan betrakta sfären med centrum i (0,0,1) och radie } r' = \sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} \}$$

$$= 3 \iiint_{r' \leq 1} r'^2 dV \underbrace{=}_{dV = 4\pi r'^2 dr'} 12\pi \iiint_{r' \leq 1} r'^4 dr' = \frac{12\pi}{5}$$

PROBLEM (5)

- (a) Vektorfältet är kontinuerligt deriverbart. Kurvan är en cirkel i planet $y = 3$ (en sluten kurva). Därför kan vi använda Stokes sats.

- (b) Vektorfältet är kontinuerligt deriverbart. Kurvan är en ellips som ligger i yz -planet (och den är sluten eftersom $u: 0 \rightarrow 2\pi$). Därför kan vi använda Stokes sats.
- (c) Vektorfältet är kontinuerligt deriverbart. Kurvan är en ellips som ligger i yz -planet. Men den är inte sluten eftersom $u: 0 \rightarrow \pi$. Därför kan vi inte använda Stokes sats.
- (d) Vektorfältet är kontinuerligt deriverbart. Kurvan är en cirkel med radie 1 som ligger i xy -planet (en sluten kurva). Därför kan vi använda Stokes sats.
- (e) Vektorfältet är inte kontinuerligt deriverbart i $\rho = 0$, alltså längs z -axeln. Kurvan är en cirkel runt z -axeln, så varje yta med rand på kurvan korsar z -axeln. Eftersom vektorfältet inte är kontinuerligt deriverbart längs z -axeln kan vi inte använda Stokes sats.

PROBLEM (6)

Kurvan är en ellips som ligger i xy -planet med radier a och b . Vektorfältet är kontinuerligt deriverbart. Så vi kan använda Stokes sats.

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Rotationen är

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial (y)}{\partial z} \right) \hat{e}_y + \left(\frac{\partial (-x)}{\partial x} - \frac{\partial (y)}{\partial y} \right) \hat{e}_z = -2\hat{e}_z$$

Som yta använder vi ellipsen. Vi skriver $d\vec{S} = \hat{n}dS$, se (7.2). Normalen $\hat{n}$ till ytan ligger längs z -axeln eftersom ellipsen ligger i xy -planet. Men orienteringen av ytan definieras inte, så vi vet inte om $\hat{n} = \hat{e}_z$ eller $\hat{n} = -\hat{e}_z$. Om vi tar $\hat{n} = \hat{e}_z$ får vi

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = -2 \iint_S \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z dS = -2 \iint_S dS = -2\pi ab$$

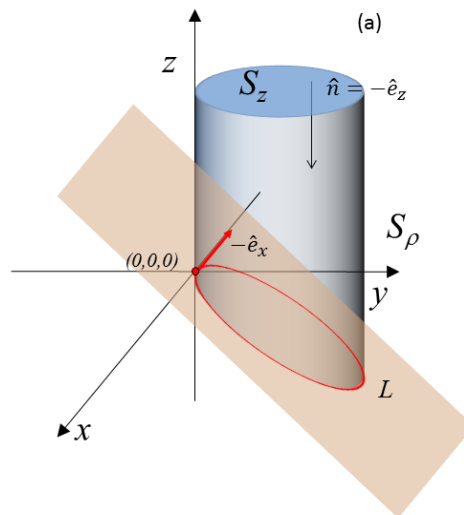
Notera att vi kunde ha tagit $\hat{n} = -\hat{e}_z$. I detta fall blir resultatet $2\pi ab$.

PROBLEM (7)

Kurvan är en ellips som ligger i planet $y + z = 0$. Vektorfältet är kontinuerligt deriverbart så vi kan använda Stokes sats:

$$\text{rot} \vec{A} = (y + 2x)\hat{e}_z.$$

Eftersom rotationen är längs $\hat{e}_z$ blir den enklaste ytan vi kan använda en vertikal cylinder med bas på ellipsen och som i överdelen slutar med en cirkelyta som ligger i xy -planet. Se Figur. Ytan utgör summan av mantelytan $\vec{S}_\rho$ och den horisontella ytan $\vec{S}_z$. På grund av kurvans orientering (normalen pekar inåt volymen) får vi $\vec{S}_z = -\hat{e}_z dS$. Vidare är normalen till $\vec{S}_\rho$ parallell med xy -planet, så $\hat{e}_z \cdot d\vec{S}_\rho = 0$. Se Figur.



Med användning av Stokes sats fås därmed

$$\begin{aligned}
 \iint_S \text{rot} \bar{A} \cdot d\bar{S} &= \iint_S (y+2x)\hat{e}_z \cdot d\bar{S} = \iint_{S_z} (y+2x)\hat{e}_z \cdot d\bar{S}_z + \underbrace{\iint_{S_\rho} (y+2x)\hat{e}_z \cdot d\bar{S}_\rho}_{=0} = \\
 &= \iint_{S_z} (y+2x)\hat{e}_z \cdot (-\hat{e}_z) dS_z = -\iint_{S_z} (y+2x) dS_z = \\
 &= \{\text{Eftersom cylinderns axel inte utgörs av z-axeln, byter vi variabel} \\
 &\quad y' = y - 1 \text{ och får}\} = \\
 &= -\iint_{S_\rho} (y' + 2x + 1) dS_z = -\iint_{S_\rho} (\rho \sin \theta + 2\rho \cos \theta + 1) dS_z = -\iint_{S_\rho} dS_z = -\pi
 \end{aligned}$$

PROBLEM (8)

$$\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = \iint_S \text{rot} \bar{A} \cdot d\bar{S}$$

(a)

$$\text{rot} \bar{A} = (3, 1, -2)$$

$$d\bar{S} = -\hat{e}_z dS \quad (-\hat{e}_z \text{ because the orientation is anti-clockwise})$$

$$\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = -\iint_S (3\hat{e}_x + \hat{e}_y - 2\hat{e}_z) \cdot \hat{e}_z dS = 2 \iint_S dS \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\substack{S \text{ is a unit circle (R=1),} \\ \text{so its area is } \pi R^2 = \pi}} = 2\pi$$

(b)

$$\text{rot} \bar{A} = y\hat{e}_z$$

Note that:

$$\hat{e}_z \cdot d\bar{S} = dxdy \quad \text{is the projection } d\bar{S} \text{ of on the xy-plane}$$

$$\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = \iint_S \text{rot} \bar{A} \cdot d\bar{S} = \iint_S y \hat{e}_z \cdot d\bar{S} = \iint_{S_{xy}} y dx dy =$$

{where S_{xy} is the projection of S on the xy plane}

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} y dx dy = \frac{1}{6}$$

(c)

$$\text{rot} \bar{A} = 2x \hat{e}_z$$

Note that:

$\hat{e}_z \cdot d\bar{S} = dx dy$ is the projection $d\bar{S}$ of on the xy-plane

$$\oint_L \bar{A} \cdot d\bar{r} = \iint_S \text{rot} \bar{A} \cdot d\bar{S} = \iint_S 2x \hat{e}_z \cdot d\bar{S} = \iint_{S_{xy}} 2x dx dy = \int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/3}} 2x dx dy = \frac{3}{4}$$

{where S_{xy} is the projection of S on the xy plane}

PROBLEM (9)

Vektorfältet $\bar{A}$ är konservativ om $\text{rot} \bar{A} = \bar{0}$.

(a) $\bar{A} = x^2 \hat{e}_x + y^2 \hat{e}_y + z^2 \hat{e}_z$

$$\text{rot} \bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z^2}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial x^2}{\partial z} - \frac{\partial z^2}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left(\frac{\partial y^2}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y} \right) \hat{e}_z = \bar{0}$$

Så, vektorfältet är konservativ.

(b) $\bar{A} = x^2 \hat{e}_x + z^2 \hat{e}_y + y^2 \hat{e}_z$

$$\text{rot} \bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & z^2 & y^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial y^2}{\partial y} - \frac{\partial z^2}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial x^2}{\partial z} - \frac{\partial y^2}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left(\frac{\partial z^2}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y} \right) \hat{e}_z = (2y - 2z) \hat{e}_x$$

Så, vektorfältet är inte konservativ.

(c) $\bar{A} = f(\rho) \hat{e}_\rho$ (där $\hat{e}_\rho$ är en basvektor i ett cylindriskt koordinatsystem)

Vi har $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, och

$$\hat{e}_\rho = \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{e}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{e}_y = \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\bar{A} = \frac{f(\rho)x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{e}_x + \frac{f(\rho)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{e}_y$$

$$\text{rot} \bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{f(\rho)x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{f(\rho)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f(\rho)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f(\rho)x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) \hat{e}_z$$

Vi har $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, så

$$\frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f(\rho)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Därför

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f(\rho)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} xy - f(\rho) \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f(\rho)x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} xy - f(\rho) \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2}$$

Så

$$\text{rot} (f(\rho) \hat{e}_\rho) = \bar{0} \text{ och vektorfält är konservativ}$$

(d) $\bar{A} = f(\rho) \hat{e}_\varphi$ (där $\hat{e}_\varphi$ är en basvektor i ett cylindriskt koordinatsystem)

Vi har $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, och

$$\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{e}_y = \frac{-y\hat{e}_x + x\hat{e}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\bar{A} = -\frac{f(\rho)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{e}_x + \frac{f(\rho)x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{e}_y$$

$$rot \bar{A} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{f(\rho)y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{f(\rho)x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f(\rho)x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f(\rho)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right) \hat{e}_z$$

Därför

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f(\rho)x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \frac{\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} x^2 + f(\rho) \sqrt{x^2+y^2} - f(\rho) \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f(\rho)y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \frac{\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} y^2 + f(\rho) \sqrt{x^2+y^2} - f(\rho) \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

Efter lite algebra, vi får

$$rot(f(\rho)\hat{e}_\rho) = \left(\frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} + \frac{f(\rho)}{\rho} \right) \hat{e}_z$$

Så vektorfältet är inte konservativt