

LEKTION, VECKA 1

PROBLEM 1

Beräkna följande produkter (med $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\varphi$ och $\hat{e}_\theta$ basvektorer i ett sfäriskt koordinatsystem och $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$ basvektorer i ett Kartesiskt koordinatstem)

(a) $\hat{e}_r \cdot \hat{e}_y$

(b) $\hat{e}_z \cdot \hat{e}_r$

(c) $\hat{e}_r \cdot (\hat{e}_x + 2\hat{e}_y)$

PROBLEM 2

Beräkna i ett cylindriskt koordinatsystem följande integraler

(a) $\int_0^1 \rho \cos \varphi \hat{e}_\varphi d\rho$

(b) $\int_0^\pi \rho \cos \varphi \hat{e}_\varphi d\varphi$

PROBLEM 3

Rita följande skalärfältet

(a) $\phi = z$

(b) $\phi = x + y$

(c) $\phi = x^2 - y^2$

PROBLEM 4

Beräkna gradienten av skalärfältet $f(x, y, z) = e^{xy} \ln(z)$

PROBLEM 5

Beräkna ökningen längs riktning $(-1, -1, -1)$ i punkten P: $(1, 1, 1)$ (i kartesiska koordinater) av följande skalärfält:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$f(x, y, z) = e^{-(x^2 + y^2 - z^2)}$$

PROBLEM 6

Beräkna en parameterisering $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ av ytan $x^2 - 2y^2 - 2z = 0$.

PROBLEM 7

Betrakta ytan av problem 6. Beräkna:

- (a) normalen till ytan i punkten $P: (2, 1, 1)$
- (b) tangentplanet i punkten $P: (2, 1, 1)$

För att beräkna normalen, använd två olika metoder:

- $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$
- gradienten

PROBLEM 8

Elektrostatiska potentialen V definieras av $\vec{E} = -\text{grad}V$, var $\vec{E}$ är elektriskafältet. Kraften $\vec{F}$ på en laddning q i ett elektriskafältet $\vec{E}$ är $\vec{F} = q\vec{E}$. I vilken riktning ska röra sig en laddning q som ligger i punkt $x=1, y=-2, z=1$ om elektrostatiska potentialen är $V = 1/r$ (med r avståndet från origo)? Beräkna riktningen i ett Kartesiskt koordinatsystem. Sen, uttryck resultaten i ett sfäriskt koordinat system.

Vi kommer att studera i Kapitel 10 en enklare metod för att lösa uppgiften.

PROBLEM 9

Rita på xy -planet följande vektorfält (i Kartesiska koordinater):

- (a) (y, x)
- (b) $(x, y)/\sqrt{2}$
- (c) $(x, -y)$
- (d) $(y, 0)$

PROBLEM 10

En elektrisk ström I går i en cirkulär spole. Spolen har radien r_0 , den har centrum i origo, och ligger i planet $z=0$.

Biot-Savarts lag lyder:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

där $d\vec{l}'$ är ett infinitesimalt längdelement längs spolen (kurvan L), $\vec{r}'$ är en vektor från origo till $d\vec{l}'$, $\vec{r}$ är positionsvektorn (från origo till punkten där vi vill beräkna $\vec{B}$). Beräkna magnetfältet $\vec{B}$ längs z -axeln.