



Uppgifter till Seminarium 5

Se kursens canvassida för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

Seminariet börjar med ett prov. Uppgiften kommer att handla om att beräkna egenvärdena och egenvektorererna av en matris.

Själva seminariet handlar om att diskutera följande uppgifter.

Uppgift 1. Förklara med hjälp av egenskaperna hos determinanter varför det för kvadratiska matriser, A , i allmänhet gäller att $\det(A^T A) = (\det(A))^2$ och använd sedan detta för att beräkna $\det(A^T A)$ i specialfallet när

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} -11 & 9 & 6 \\ -8 & 6 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

- (a) Visa, utan att beräkna det karakteristiska polynomet, att $\lambda = 1$ är ett egenvärde till A .
- (b) Bestäm samtliga egenvärden och motsvarande egenvektorer till A .
- (c) Bestäm en diagonalmatris D och en matris P sådana att $A = PDP^{-1}$.

Uppgift 3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -\frac{5}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestäm alla (reella) egenvärden och motsvarande egenvektorer till A . *Tips:* ett av egenvärdena är $\lambda = 2$.
- (b) Bestäm alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till A^2 .
- (c) Hitta en diagonalmatris D och en matris P sådana att $A^2 = PDP^{-1}$.

- (d) Använd detta för att beräkna $A^{15} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Uppgift 4. Låt L vara linjen som ges av ekvationen $4x - 3y = 0$. Låt $S: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ vara spegling om denna linje, och låt $P: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ vara projektionen på denna linje.

- (a) Avgör, geometrisk utan beräkningar om det finns nollskilda vektorer $\vec{x}$ sådan att
- i) $S(\vec{x}) = 1 \cdot \vec{x}$ ii) $P(\vec{x}) = 1 \cdot \vec{x}$ iii) $S(\vec{x}) = -1 \cdot \vec{x}$ iv) $P(\vec{x}) = 0 \cdot \vec{x}$.
- (b) Visa att om du har en nollskild vektor $\vec{x}$ som satisfierar i), ii), iii) eller iv), då vill alla punkt på linjen genom origo och $\vec{x}$ också satisfiera i), ii), iii) eller respektivt iv).
- (c) Bestäm standardmatriserna till S och P , och bestäm deras karakteristiska polynom: Om A är en 2×2 -matris, då är det karakteristiska polynomet till A lika med $\det(\lambda \cdot I - A)$, där λ är en variabel, och I är identitetsmatrisen.
- (d) Bestäm nollställena till de två polynom du hittade ovan.
- (e) För varje nollställe λ_0 du hittade till det karakteristiska polynomet till avbildningen S , bestäm alla vektorer $\vec{x}$ sådan att $S(\vec{x}) = \lambda_0 \vec{x}$.
- (f) För varje nollställe λ_0 du hittade till det karakteristiska polynomet till avbildningen P , bestäm alla vektorer $\vec{x}$ sådan att $P(\vec{x}) = \lambda_0 \vec{x}$.

ANNAT

Här är några andra moment som är viktiga och intressanta att diskutera.

- Vilka metoder finns det för att beräkna determinanter? Vad är deras för- och nackdelar?
- Vad är den geometriska tolkningen av egenvektorer till en linjär avbildning? Till exempel till egenvärdena 0 eller 1?
- Varför är egenvektorer till olika egenvärden linjärt oberoende?
- Är en $n \times n$ -matris diagonaliserbar om den har n olika egenvärden? Är det ett nödvändigt villkor?