



Uppgifter till Seminarium 4

Se kursens canvassida för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

Seminariet börjar med ett prov. Uppgiften kommer att handla om att beräkna standardmatrisen till en geometriskt definierad avbildning och att hitta en bas till dess noll- eller kolonnrum.

Själva seminariet handlar om att diskutera följande uppgifter.

Uppgift 1. Avbildningen $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Hitta två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ som utgör en bas för nollrummet, $\ker(T)$.
- (b) Bestäm en ekvation för planet som utgör nollrummet till T .

Uppgift 2. Den här uppgiften handlar om linjära avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ och deras standardmatriser.

- (a) Låt $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara rotationen kring origo med en vinkel på 90° ($\pi/2$ radianer) moturs. Bestäm standardmatrisen, A , för T_1 .
- (b) Låt $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen $y = -x$. Bestäm standardmatrisen, B , för T_2 .
- (c) Bestäm standardmatrisen, C , för sammansättningen $T_2 \circ T_1$.
- (d) Avbildningen $T_2 \circ T_1$ är en spegling. I vilken linje? Motivera ditt svar.

Uppgift 3. Den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uppfyller

$$T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestäm matrisen A som hör till T .
- (b) Kontrollera att A är sin egen invers.

Uppgift 4. Den linjära avbildningen $R: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ är rotationen kring vektorn $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ med vinkel $\frac{2}{3}\pi$ enligt högerhandregeln. Basen $\mathcal{B}$ av $\mathbf{R}^3$ ges av

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- (a) Bestäm standardmatrisen till R . *Tips:* Inse att (men motivera varför) standardbasvektorerna avbildas på varandra.
- (b) Bestäm matrisen för R med avseende på basen $\mathcal{B}$.
- (c) Den linjära avbildningen $L: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ges av $L(\vec{x}) = R(\vec{x}) - x$. Bestäm rangen av L .
- (d) Bestäm en bas för nollrummet (kärnan) till L .

Uppgift 5. En avbildning f sökes som uppfyller

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Varför finns det ingen sådan avbildning som är linjär?
- (b) Hur måste man anpassa det sista värdet, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, så att en sådan linjär avbildning f finns?
- (c) Finn standardmatrisen till f (om det sista värdet anpassas som i uppgift b).

Uppgift 6. Låt $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2$, och definiera ytterligare vektorer $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ genom att vrida $\vec{v}_1$ moturs med $45^\circ, 90^\circ$ respektive 135° . Den linjära avbildningen $S: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ är spegling om linjen som spänns upp av $\vec{v}_1$.

- (a) Bestäm matrisen A till S med avseende på basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$.
- (b) Bestäm matrisen B till S med avseende på basen $\{\vec{v}_2, \vec{v}_4\}$.
- (c) Bestäm övergångsmatrisen P från basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ till basen $\{\vec{v}_2, \vec{v}_4\}$.
- (d) Beräkna $P^{-1}BP$ och förklara varför detta ger A .

ANNAT

Här är några andra moment som är viktiga och intressanta att diskutera.

- Vad menas med linjär avbildning? Är varje linjär avbildning från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$ en matrisavbildning? Hur många rader och kolonner har avbildningens matris?
- Vad menas med en avbildnings nollrum/kärna och bildrum? Vilka vektorer utgör nollrummet och bildrummet till en rotation och till en spegling?
- Har varje matris en invers? Om inte, hur avgör man om en matris har en invers och hur beräknar man den?