Kap 5. Användningar av differentialkalkyl.

K. 5.1 Derivatan under integraltecken.

Ex Låt $f(s,t) = s^3 e^{-s^2 t}$, $s \in \mathbb{R}$.

$$\int_0^\infty f(s,t)\,dt = \int_0^\infty s^3 e^{-s^2 t}\,dt = \left[-s e^{-s^2 t}\right]_{t=0}^{\infty} = s$$

$$\frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty f(s,t)\,dt\right) = \frac{d}{ds}(s) = 1 \quad \text{för alla } s \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^\infty \frac{d}{ds} f(s,t)\,dt = \int_0^\infty (3s^2 - 2s^4 t) e^{-s^2 t}\,dt.$$ Men detta $= 0$ för $s = 0$.

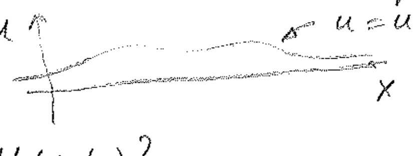
Här $\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(s,t)\,dt \neq \int_0^\infty \frac{d}{ds} f(s,t)\,dt$. Under vilka villkor har vi "="?

Varför är detta viktigt?

Ex Värmeledningsekvation: $u(x,t)$ = temperatur i pt x, tid t.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$u(x,0) = u_0(x)$ givet



$u(x,t)$?

Lösning: $$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, u_0(y)\,dy$$

Kontrollera genom att derivera under integraltecknet:

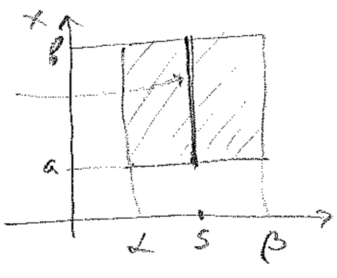
$$\partial_t u - \partial_{xx}^2 u = (\partial_t - \partial_{xx}^2)\int_{\mathbb{R}} -''- \,dy \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}} \Bigg[\underbrace{(\partial_t - \partial_{xx}^2)\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}}_{=0}\Bigg] u_0(y)\,dy = 0$$

är detta tillåtet?

Sats 1 Antag att $f(s,x)$ och $f_s'(s,x)$ är kontinuerliga i $\alpha < s < \beta$, $a \le x \le b$.

Då är funktionen $F(s) = \int_a^b f(s,x)\,dx$ deriverbar i $\alpha < s < \beta$ och

$$\frac{dF}{ds} = \int_a^b f_s'(s,x)\,dx.$$



$\underline{Ex}$ $F(s) = \int_0^2 (sx^2 + s^2x^3)\,dx = \frac{8}{3}s + 4s^2.$

$$F'(s) \underset{\text{sats 1}}{=} \int_0^2 \frac{d}{ds}(sx^2+s^2x^3)\,dx = \int_0^2 (x^2+2sx^3)\,dx =$$

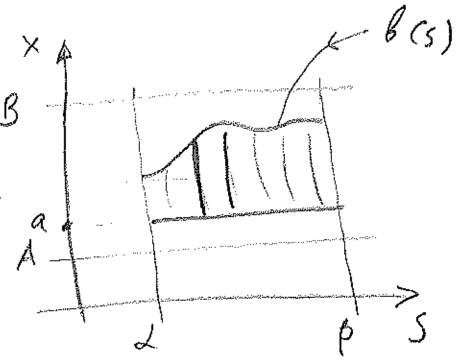
$$= \frac{8}{3} + 8s = \left(\frac{8}{3}s + 4s^2\right)' .$$ Satsen verkar stämma.

Sats 2 Antag att $f(s,x)$ och $f_s'(s,x)$ är kont. i

$\alpha < s < \beta, \quad A \le x \le B.$

Låt $b = b(s)$ vara en C^1-funktion av $s \in (\alpha,\beta)$ med $b(s) \in (A,B)$

Låt $A \le a \le B$. Då är



$F(s) = \int_a^{b(s)} f(s,x)\,dx$ deriverbar, och

$$F'(s) = \int_a^{b(s)} f_s'(s,x)\,dx + f(s,b(s))\cdot b'(s)$$

$\underline{Ex}$ $F(s) = \int_1^{1/s} \frac{\sin sx}{x}\,dx, \quad s>0$

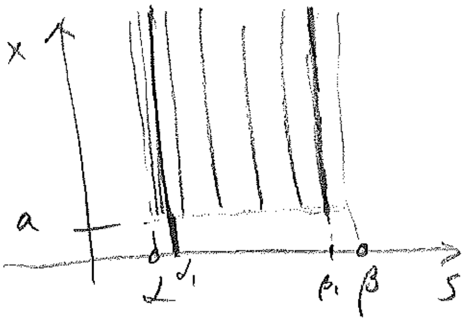
$$F'(s) \underset{\text{Sats 2}}{=} \int_1^{1/s} \frac{\cancel{x}\cos sx}{\cancel{x}}\,dx + \underbrace{\frac{\sin(s\cdot\frac{1}{s})}{1/s}}_{f(s,b(s))}\cdot\left(-\frac{1}{s^2}\right) = \left[\frac{\sin sx}{s}\right]_{x=1}^{1/s} - \frac{\sin 1}{s} =$$

$$= \frac{\sin s}{s}.$$

Generaliserad integral

Sats 3 Antag:

- $f(s,x)$ och $f_s'(s,x)$ är kontin. i $\alpha < s < \beta, \quad x > a$
- Integr. $F(s) = \int_a^\infty f(s,x)\,dx$ är konvergent för $\alpha < s < \beta$



- Till varje kompakt delintervall $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha,\beta)$ finns en majorerande funktion

(Majorerande funktion) $g(x)$ sådan att

(i) $|f_s'(s,x)| \le g(x)$ för $s \in [\alpha_1, \beta_1]$ och $x \ge a$

(ii) $\int_a^\infty g(x)\,dx$ är konvergent.

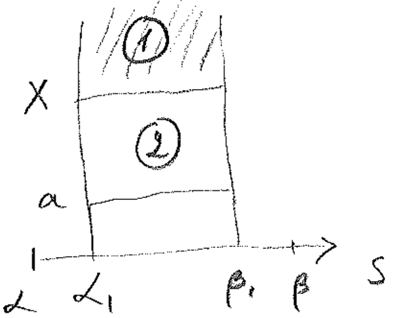
Då är $F(s)$ deriverbar i $\alpha < s < \beta$, och
$$F'(s) = \int_{x=a}^\infty f_s'(s,x)\,dx.$$

Bevis $\quad \dfrac{F(s+h) - F(s)}{h} = \dfrac{1}{h}\int_a^\infty f(s+h,x) - f(s,x)\,dx =$

$$= \int_a^\infty f_s'(s+\theta h, x)\,dx = \int_a^\infty f'(s,x)\,dx + R(h)$$

där $0 \le \theta \le 1$, och
$$R(h) = \int_a^\infty \left(f_s'(s+\theta h, x) - f_s'(s,x)\right)dx.$$

Antag att $s, s+h \in [\alpha_1, \beta_1] \subset \alpha, \beta$.



1 Av (ii) följer att $\exists X$ s.a.
$2\int_X^\infty g(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Då gäller:
$$\left|\int_X^\infty \left(f_s'(s+\theta h, x) - f_s'(s,x)\right)dx\right| \le \int_X^\infty |f'(s+\theta h, x)|\,dx + \int_X^\infty |f_s(s,x)|\,dx$$
$$\le 2\int_X^\infty g(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2 Eftersom f_s' är kontin. på kompakten $[\alpha_1, \beta_1] \times [a, X]$, är den likformigt kontin., dvs $\exists\ \delta > 0$ s.a.
$$|f_s'(s+\theta h, x) - f_s'(s,h)| < \frac{\varepsilon}{2(X-a)} \quad \text{för } |h| < \delta \ \forall x \in [a, X].$$
Detta ger: $\left|\int_a^X \left(f_s'(s+\theta h, x) - f_s'(s,x)\right)dx\right| < \int_a^X \frac{\varepsilon}{2(X-a)}\,dx = \frac{\varepsilon}{2}.$

Sammantaget, $|R(h)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ för alla $|h| < \delta$,

dvs $\lim_{h\to 0} R(h) = 0$. $\boxtimes$

$\underline{Ex}$

$$-\frac{1}{s^2} = \frac{d}{ds} \underbrace{\int_0^\infty e^{-sx}\,dx}_{\frac{1}{s}} = $$

här $\left|\frac{\partial}{\partial s} e^{-sx}\right| = \left|-xe^{-sx}\right| \leq \underbrace{\boxed{xe^{-\alpha_1 x}}}_{g(x)} \quad \forall s \in (\alpha_1, \beta_1),\ x \geq 0$

Vi har $\int_0^\infty g(x)\,dx = \int_0^\infty xe^{-\alpha_1 x}\,dx$ är konvergent.

$$\overset{\text{satsen}}{\underset{\text{ger}}{=}} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-sx}\right)dx = \int_0^\infty (-x)e^{-sx}\,dx.$$

På samma sätt, $\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty e^{-sx}\,dx = \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-sx}\,dx =$

$$= \int_0^\infty (-x)^n e^{-sx}\,dx$$

$$\cancel{(-1)^n} \cdot n!\, s^{-n-1} = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-sx}\,dx. \quad \text{för alla } s$$

För $s = 1$ får vi: $\boxed{n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx := \Gamma(n+1)}$