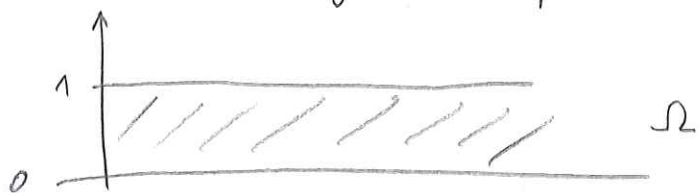


K 6.6, Generaliserade dubbelintegraler.

Ex 1 $f(x, y) = xy(2 - xy)e^{-xy}$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \in (0, 1)\}$$



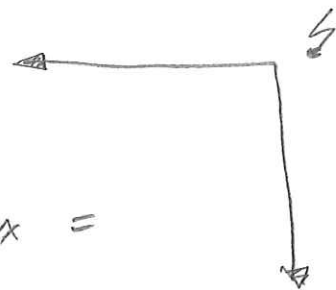
$$\iint_{\Omega} f \, dx \, dy = ?$$

OBS: $\int_0^1 \left(\int_0^{\infty} f(x, y) \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[x^2 y e^{-xy} \right]_{x=0}^{\infty} dy =$

$$= \int_0^1 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 y e^{-xy} - 0 \right) dy = 0.$$

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^1 f(x, y) \, dy \right] dx = \int_0^{\infty} \left[x y^2 e^{-xy} \right]_{y=0}^1 dx =$$

$$= \int_0^{\infty} (x e^{-x} - 0) dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^{\infty} = 1.$$

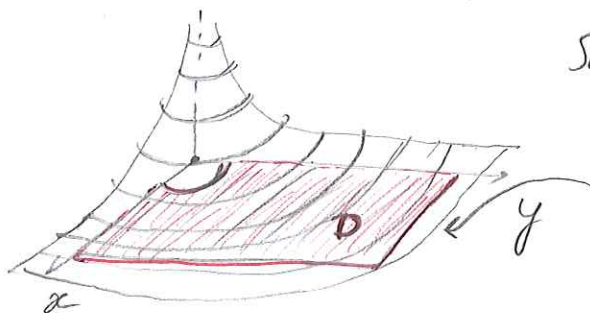


Betrakta positiv integrand:

Låt f vara en kont. funktion i ett öppet område $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ med $f(x, y) \geq 0, (x, y) \in \Omega$.

Def En begränsad kvadrerbar delmängd D av Ω är en avskärning om f är begränsad på D .

$$\Omega = \{x > 0, y > 0\}.$$



D-avskärning.

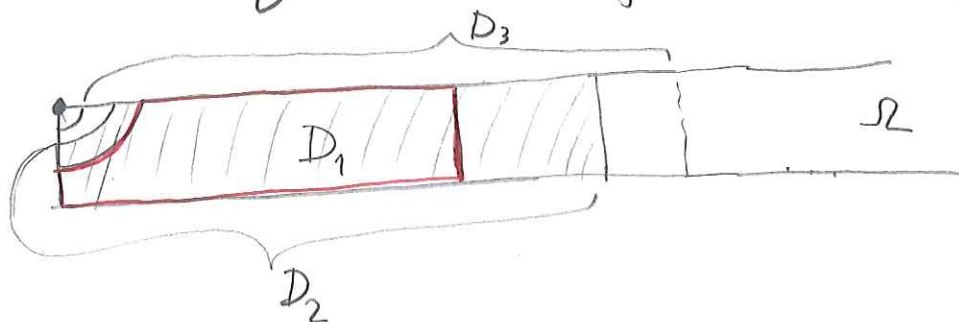
Def $\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$ (med $f(x,y) \geq 0$) är konvergent

om mängden $M = \left\{ \iint_D f(x,y) dx dy \mid D \text{ är en avskärning av } \Omega \right\}$ är uppåt begränsad. Annars är den divergent.

Om integralen är konvergent, definierar vi

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \sup M = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x,y) dx dy$$

dar $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ är en uttömmande svit av avskärningar (d.v.s. $D_n \subset D_{n+1}$ och för varje avskärning $D \subset \Omega$ finns n s. a. $D \subset D_n$).



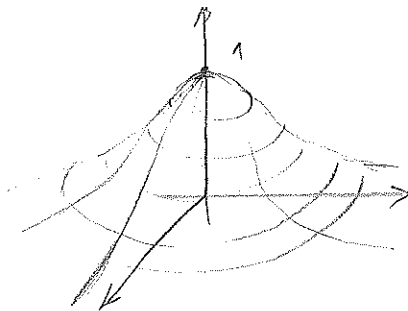
Itererade integraler För generaliserade integraler med positiv integrand gäller:

om den inre enkelintegralen (t.ex. m.a.p. x) är konvergent för varje y , då är dubbelintegralen konvergent om den yttre enkelintegralen är konvergent. I så fall gäller:

$$\iint_{\Omega} f dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

E_x Gaussisk integral

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = ?$$



$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right) dx =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 < \infty, \text{ alltså } \bar{a}r \text{ } I \text{ konvergent.}$$

$$I \text{ polära koordinater: } I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r dr d\varphi =$$
$$= 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\infty} = \pi.$$

$$\text{Alltså, } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Uppg. 6.34.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} x^2 e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \Leftrightarrow \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r^2 \cos^2 \varphi e^{-r} \cdot r dr d\varphi$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} r^3 e^{-r} dr \right) := I$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos \frac{\varphi}{2}}{2} d\varphi = \left[\frac{1}{2} \varphi \right]_0^{2\pi} = \boxed{\pi}$$



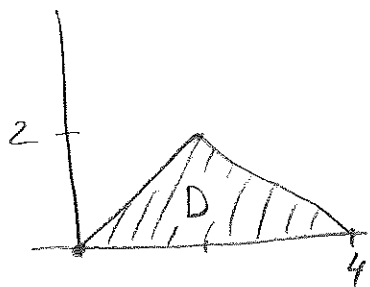
$$I_2 = \int_0^{\infty} \underbrace{r^3}_{u} \underbrace{e^{-r}}_{v'} dr = \underbrace{r^3 \cdot (-e^{-r})}_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 3r^2 \cdot (-e^{-r}) dr = 3 \int_0^{\infty} \underbrace{r^2}_{u} \underbrace{e^{-r}}_{v'} dr =$$

$$= 3 \left[\underbrace{r^2 \cdot (-e^{-r})}_0^{\infty} - 2 \int_0^{\infty} \underbrace{r}_{u} \underbrace{(-e^{-r})}_{v'} dr \right] = 6 \int_0^{\infty} \underbrace{r}_{u} \underbrace{e^{-r}}_{v'} dr =$$

$$= 6 \left[\underbrace{r e^{-r}}_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1 \cdot (-e^{-r}) dr \right] = 6 \int_0^{\infty} e^{-r} dr = -6e^{-r} \Big|_0^{\infty} = \boxed{6}.$$

$$\text{Alltså, } \underline{I = I_1 \cdot I_2 = \boxed{6\pi}.}$$

Uppg. 6.53



Är $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$ konvergent?

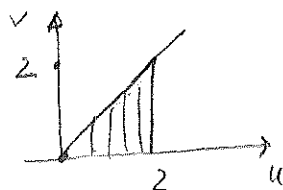
I så fall, beräkna dess värde.

OBS Den enda singulariteten vid $(x,y)=(0,0)$.

Låt $x = u+v$
 $y = u-v$

Då $u = \frac{x+y}{2}$
 $v = \frac{x-y}{2}$

(x,y)	(u,v)
$(0,0)$	$(0,0)$
$(4,0)$	$(2,2)$
$(2,2)$	$(2,0)$



$$J = \det \frac{d(x,y)}{d(u,v)} du dv =$$

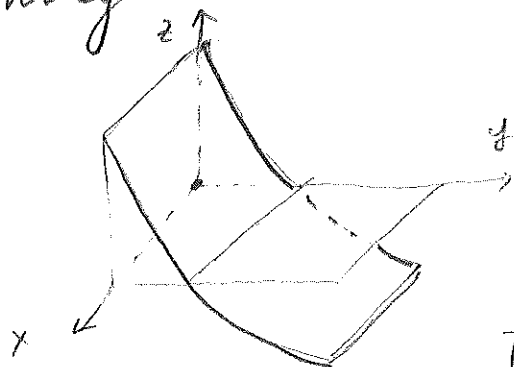
$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2.$$

koord. bytet byter orientering!

I de nya variablerna får vi:

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy &= \int_0^2 \left(\int_0^u e^{-\frac{v}{u}} \cdot \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| dv \right) du = 2 \int_0^2 \left(\int_0^u e^{-\frac{v}{u}} dv \right) du \\ &= 2 \int_0^2 \left[-u e^{-\frac{v}{u}} \right]_{v=0}^u du = 2 \int_0^2 (-u e^{-1} + u) du = 2(1-e^{-1}) \int_0^2 u du \\ &= 4(1-\frac{1}{e}). \end{aligned}$$

Integrand med växlande tecken.



$$f^+ = \begin{cases} f & \text{då } f \geq 0 \\ 0 & \text{då } f < 0 \end{cases}$$

$$f^- = \begin{cases} 0 & \text{då } f \geq 0 \\ -f & \text{då } f < 0 \end{cases}$$

Dessa är icke-negativa, och

$$f^+ - f^- = f, \quad f^+ + f^- = |f|.$$

Def. Dubbelintegralen $\iint_{\Omega} f dx dy$ är konvergent
om både $\iint_{\Omega} f^+ dx dy$ och $\iint_{\Omega} f^- dx dy$ är
konvergenta (dvs om $\iint_{\Omega} |f| dx dy$ är konvergent)

Vi sätter då
$$\iint_{\Omega} f dx dy := \iint_{\Omega} f^+ dx dy - \iint_{\Omega} f^- dx dy$$

