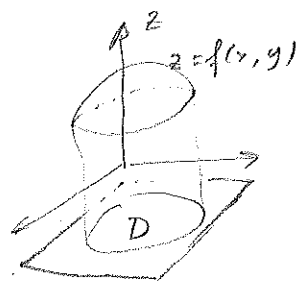


Kap. 6.2 Integration över godtyckliga områden.

Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara en begränsad mängd
 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ — " — funktion

$$\text{Låt } f_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Def f är integrerbar över D om $f_D(x,y)$ är integrerbar över någon rektangel Δ som innehåller D , och vi sätter då $\iint_D f dx dy := \iint_{\Delta} f_D dx dy$

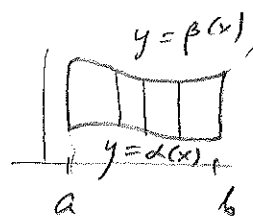


Sats 4 Antag att f är kontinuerlig på

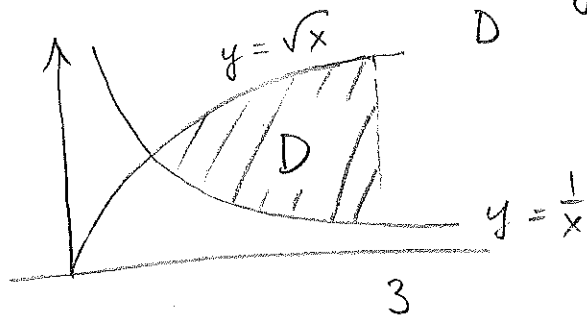
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

där α, β är kontin. funktioner på $[a,b]$. Då är f integrerbar över D och

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right) dx$$



Ex Evaluera $\iint_D x^2 y dx dy$ där

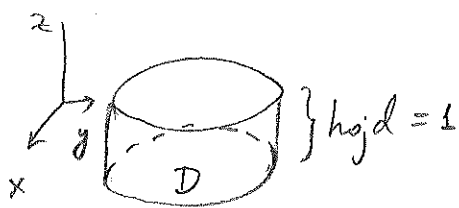


$$\iint_D x^2 y dx dy = \int_1^3 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} x^2 y dy \right) dx =$$

$$= \int_1^3 \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_{y=\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x}{2} \right]_1^3 = 9.$$

Ex $\iint_D 1 \, dx \, dy = \text{Area}(D)$

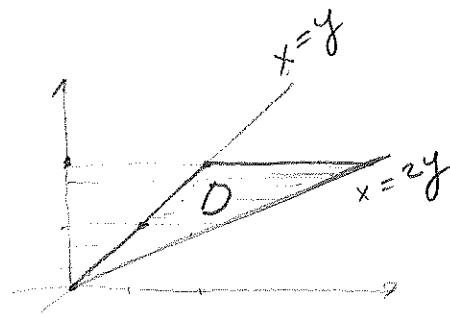


$\text{Volym} = \text{Area}(D).$

Ex Låt D vara triangeln

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2y\}.$

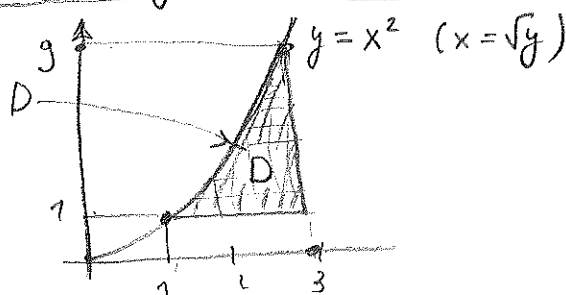
Då gäller $\iint_D (2x + 3y) \, dx \, dy =$



$$\int_0^2 \left(\int_y^{2y} (2x + 3y) \, dx \right) dy = \int_0^2 (x^2 + 3xy) \Big|_{x=y}^{x=2y} dy =$$

$$= \int_0^2 ((4y^2 + 6y^2) - (y^2 + 3y^2)) dy = \int_0^2 6y^2 dy = 2y^3 \Big|_0^2 = 16.$$

Ex Beräkna $I = \iint_D x e^y \, dx \, dy$ där



Lös: $I = \int_1^3 \left(\int_1^{x^2} x e^y \, dy \right) dx =$

$$= \int_1^3 [x e^y]_{y=1}^{y=x^2} dx = \int_1^3 (x e^{x^2} - x e) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} (e^{x^2} - x^2 e) \right]_1^3 = \frac{1}{2} (e^9 - 9e).$$

Alternativt, byt integr. ordning:

$$I = \int_1^3 \left(\int_{\sqrt{y}}^3 x e^y \, dx \right) dy = \int_1^3 \left[\frac{1}{2} x^2 e^y \right]_{x=\sqrt{y}}^{x=3} dy = \frac{1}{2} \int_1^3 (9e^y - y e^y) dy =$$

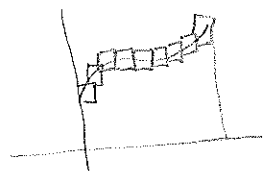
$$= \frac{1}{2} \left\{ 9[e^y]_1^3 - [y e^y] + [e^y] \right\}_1^3 = 5(e^9 - e) - \frac{9e^9}{2} + \frac{e}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} (e^9 - 9e).$$

Def En mängd $N \subset \mathbb{R}^2$ är en nollmängd om
 vi $\forall \varepsilon > 0$ kan täcka över N med ändligt många
 axelparallla rektanglar med sammanlagt area $\leq \varepsilon$.

Def En mängd är kvadrerbar om ∂D är en nollmängd.

Lemma Grafen av en kontin. funktion $\varphi: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 är en nollmängd i $\mathbb{R}^2$

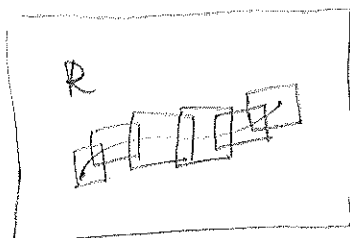


Lemma Varje begränsad funktion
 är integrerbar över en nollmängd, och

$$\iint_N f(x, y) dx dy = 0.$$

Bevis: Låt Δ vara en rektangel så att $N \subset \Delta$
 Låt $\varepsilon > 0$; Låt R vara unionen av ändligt många
 axelp. rektanglar s.a.

- $N \subset R$
- $\mu(R) < \varepsilon$
- $R \subset \Delta$



Definiera den utvidgade funkt.

$$f_N = \begin{cases} f & \text{på } N \\ 0 & \text{på } \Delta \setminus N \end{cases}$$

Låt $m = \min_{\Delta} f_N \leq 0$, $M = \max_{\Delta} f_N \geq 0$

Valj trappsfunkt. φ och ψ s.a.

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{på } \Delta \setminus R \\ m & \text{på } R \end{cases}, \quad \psi = \begin{cases} 0 & \text{på } \Delta \setminus R \\ M & \text{på } R \end{cases}$$

Då $\varphi \leq f_N \leq \psi$, och

$$\iint_{\Delta} (\psi - \varphi) dx dy = \iint_R (\psi - \varphi) dx dy \leq (M - m) \cdot \varepsilon.$$

Alltså är f integrerbar över N .

Dessutom gäller

$$\underbrace{\iint_D 0 \, dx \, dy}_{= m \mu(R)} \leq \underbrace{\iint_D f_N \, dx \, dy}_{\iint_D f \, dx \, dy} \leq \underbrace{\iint_D 1 \, dx \, dy}_{= M \mu(R)}$$

$$m \varepsilon \leq \iint_D f \, dx \, dy \leq M \varepsilon \quad \text{Då } \varepsilon \text{ är godtycklig,}$$

$$\iint_D f \, dx \, dy = 0 \quad \square$$

Medelvärdessatsen

Låt f vara kontin. på en kompakt kvadrerbar
bågrvis sammanhängande mängd $D \subset \mathbb{R}^2$.

$$\text{Låt } m = \min_D f, \quad M = \max_D f.$$

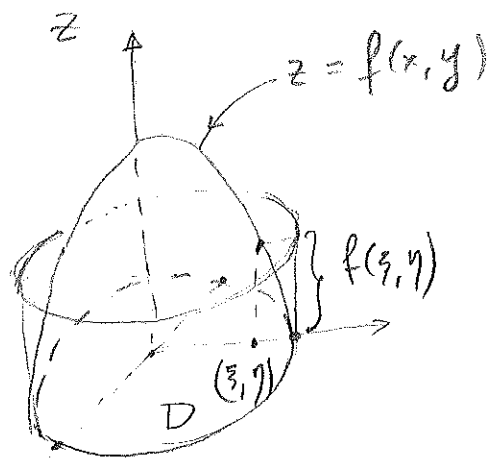
$$\text{Då } m \mu(D) \leq \iint_D f \, dx \, dy \leq M \mu(D)$$

$$\Rightarrow m \leq \underbrace{\frac{1}{\mu(D)} \iint_D f \, dx \, dy}_\text{Delta är ett tal mellan } \max_D f \text{ och } \min_D f \leq M$$

Då f är kontin., $\exists (\xi, \eta)$ s.a.

$$f(\xi, \eta) \mu(D) = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy.$$

Ex



Volymen under grafen
 $z = f(x, y), (x, y) \in D$

är samma som volymen av
cylindern över D
med höjd $f(\xi, \eta)$.