

Kap. 6. Dubbelintegraler

k. 6.1 Dubbelintegral över rektangel.

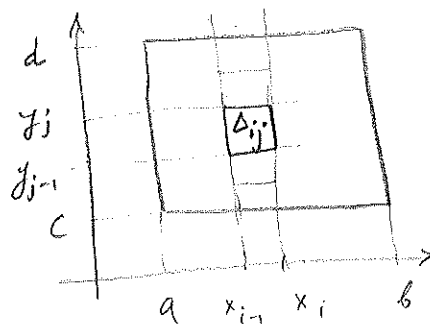
Låt $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Def $\Phi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ är en trappfunktion om det finns en indelning av Δ i mindre rektanglar

$$\Delta_{ij} = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

så att Φ är konstant på varje Δ_{ij} :

$$\Phi(x, y) = c_{ij} \quad \forall (x, y) \in \Delta_{ij}$$



Dubbelintegralen av Φ över Δ definieras av

$$\iint_{\Delta} \Phi(x, y) dx dy := \sum_{i,j} c_{ij} \mu(\Delta_{ij}) = \text{"Volymen under grafen"}$$

där $\mu(\Delta_{ij}) = \text{Area}(\Delta_{ij})$

För trappfunktioner gäller:

$$\bullet \iint_{\Delta} \lambda \Phi(x, y) dx dy = \lambda \iint_{\Delta} \Phi dx dy$$

$$\bullet \iint_{\Delta} (\Phi + \Psi) dx dy = \iint_{\Delta} \Phi dx dy + \iint_{\Delta} \Psi dx dy$$

$$\bullet \text{Om } \Phi \leq \Psi \text{ på } \Delta, \text{ så } \iint_{\Delta} \Phi dx dy \leq \iint_{\Delta} \Psi dx dy$$

$$\bullet \left| \iint_{\Delta} \Phi dx dy \right| \leq \iint_{\Delta} |\Phi| dx dy$$

$$\bullet \iint_{\Delta} \Phi dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b \Phi(x, y) dx \right) dy$$

area av tvärsnittet
av grafen av Φ med
planet $x = \text{const.}$

Riemannintegralen

Def En begränsad funktion $f(x,y)$ är (Riemann)integrerbar över rektangeln Δ om det till varje $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner φ och ψ sådana att $\varphi \leq f \leq \psi$, och
$$\iint_{\Delta} \psi dx dy - \iint_{\Delta} \varphi dx dy < \varepsilon.$$

Sats Om f är integrerbar över Δ så finns precis ett tal λ s.a.

$$\iint_{\Delta} \varphi dx dy \leq \lambda \leq \iint_{\Delta} \psi dx dy$$

för alla trappfunktioner som uppfyller $\varphi \leq f \leq \psi$.
Talet λ kallas för dubbelintegralen av f över Δ och betecknas

$$\iint_{\Delta} f(x,y) dx dy.$$

Sats 2 Om f är integrerbar över Δ så gäller

$$\iint_{\Delta} f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy.$$

om enkelintegralerna existerar.

Sats 3 Om f är kontinuerlig på Δ , så existerar enkelintegralerna, och f är integrerbar.

Ex $\Delta = [0, 3] \times [0, 1]$

$$f(x,y) = 16 - x^2 - 3y^2.$$

$$\iint_{\Delta} f(x,y) dx dy = \int_0^3 \int_0^1 (16 - x^2 - 3y^2) dy dx =$$

$$= \int_0^3 \left[16y - x^2 y - y^3 \right]_{y=0}^1 dx = \int_0^3 ((16 - x^2) - 0) dx = \int_0^3 (16 - x^2) dx$$

$$= \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 36.$$

Alternativt, $\iint_{\Delta} f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^3 (16 - x^2 - 3y^2) dx dy$

$$= \int_0^1 \left[16x - \frac{x^3}{3} - 3xy^2 \right]_{x=0}^3 dy = \int_0^1 (48 - 9 - 9y^2) dy =$$

$$= [39y - 3y^3]_{y=0}^1 = 36.$$

