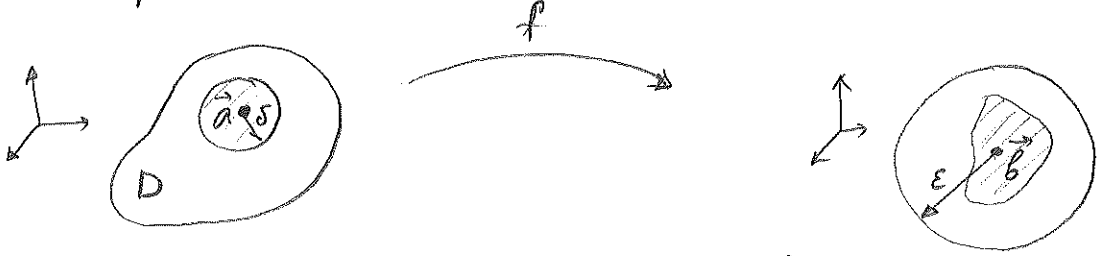
Kap. 1.5 Gränsvärden

Låt $f: D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$; a – inre punkt eller randpt till D.



<u>Def</u> f har gränsvärdet $\vec{b} \in \mathbb{R}^p$ då $\vec{x} \to \vec{a}$

om $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ s. att

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{x} - \vec{a}| < \delta \\ x \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \quad |f(\vec{x}) - b| < \varepsilon$$

Vi skriver $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$.

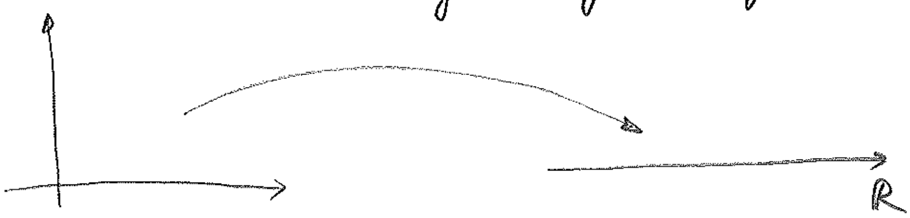
<u>OBS</u> Om $\vec{f} = (f_1, \dots f_p)$, $\vec{b} = (b_1, \dots b_p)$, så gäller

$$|f_j(\vec{x}) - b| \le |f(\vec{x}) - b| \le |f_1(\vec{x}) - b_1| + |f_2(\vec{x}) - b_2| + \dots |f_p(\vec{x}) - b_p|$$

Alltså, $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(x) = \vec{b} \iff \lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f_j(\vec{x}) = b_j$ för alla $j = 1, \dots p$.

(Vektorn konvergerar om varje komponent konvergerar).
Regler för summa, produkt, komposition, instängningsregel gäller som i endimensionella fallet. – verifiera!

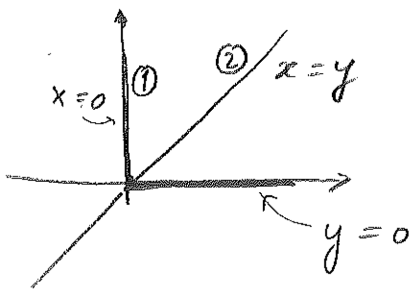
<u>Ex.</u> $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{xy + x^3y^3}$, $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.



$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin xy}{xy(1 + x^2y^2)} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \underbrace{\frac{\sin xy}{xy}}_{\to 1} \lim_{(x,y) \to (0,0)} \underbrace{\frac{1}{1 + x^2y^2}}_{\to 1} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ex $\lim_{(x,y)\to(2,3)} (xy + y^2) = 6 + 9 = 15$.

Ex $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$. Undersök $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$



Om $\lim f(x,y)$ finns, så måste den vara samma då $(x,y)\to(0,0)$ längs alla linjer.

1) låt $x=0$, $y\to 0$
här $f(x,y) = 0$, och då $\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0,y) = 0$

2) låt $x = y$, $x \to 0$.
Då $f(x,x) = \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2} \neq 0$

Gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ saknas.

En annan metod. I polära koord. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, och

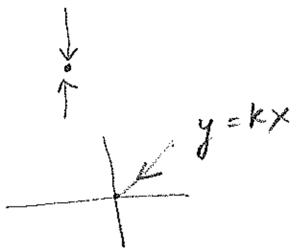
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \underbrace{\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}}$$ om det sista finns.

Men funktionen $= \cos\theta\sin\theta$ beror på θ, och (inte på r) har inget gränsvärde då $r \to 0$.

Ex $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ (se även ex 26 i boken)

Gränsvärde längs y-axeln: $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$

— " — linjen $y = kx$ $(k\neq 0)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{2k^2x^3}{x^4+kx^2} =$



$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{2k^2}{x^2+k^2}}_{bdd} \cdot x = 0$$

— " — kurvan $y = x^2$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim \frac{2x^4}{x^4+x^4} = \lim \frac{2x^4}{2x^4} = 1$$

Gränsvärdet saknas.

$\underline{Ex}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cdot \underbrace{\cos^2\theta\sin\theta}_{-1\le\,\cdot\,\le 1} = 0$

alt: $0 < \frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$, $y \to 0$ instängningssatsen. (instängningssatsen)

Def Vi säger att $\vec{f}(\vec{x}) \to \vec{b}$ då $|\vec{x}| \to \infty$ om det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\omega > 0$ s.a.

$$\left.\begin{matrix} |\vec{x}| > \omega \\ x \in D_f \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| < \varepsilon$$

$\underline{Ex}$ $f(x,y) = \frac{\sin x}{x^4+y^4}$, $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| = \frac{|\sin x|}{x^4+y^4} \le \frac{1}{x^4+y^4} \to 0 \quad \text{då } \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$$

Kap. 1.6 Kontinuitet

Låt $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^p$ med $D \subset \mathbb{R}^n$.

Def $\vec{f}$ är kontinuerlig i $\vec{a} \in D$ om gränsvärdet $\lim_{x\to\vec{a}} \vec{f}(\vec{x})$ existerar och är lika med $\vec{f}(\vec{a})$.

$\vec{f}$ är en <u>kontinuerlig funktion</u> om $\vec{f}$ är kontin. i varje pt. i D.

$\underline{Ex}$ $\begin{cases} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f(x,y) = x^2+y^2 \end{cases}$

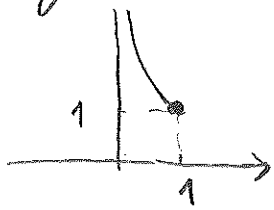
är kontin. i $(0,0)$ ty $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim(x^2+y^2) = 0 = f(0,0)$.

$\underline{Ex}$ Projektionen $x = (x_1, \ldots x_n) \longmapsto x_j$ är kontinuerlig $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ för varje $j = 1, \ldots n$, ty $|x_j - a_j| \le |\vec{x} - \vec{a}|$, så att $\vec{x} \to \vec{a} \Rightarrow x_j \to a_j$

$\underline{Ex}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x\sin(xy)$ är kontinuerlig ty $\begin{cases} (x,y) \to xy \\ (x,y) \to x \\ x \to \sin x \end{cases}$ är kontinuerliga.

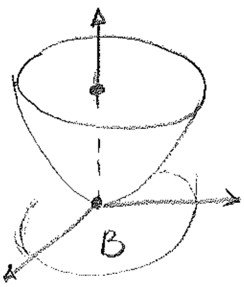
Sats Om $f: D \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig, $D \subset \mathbb{R}^n$ är kompakt, så antar f både sitt största och minsta värde på D.

Ex $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \underbrace{(0,1]}_{}$ har ett minimum, men inget max. ← ej kompakt



$f(1) = 1$ _ minimum.

Ex $f(x,y) = x^2 + y^2$ har inget maximum på $B = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < 1\}$, men har ett max. på



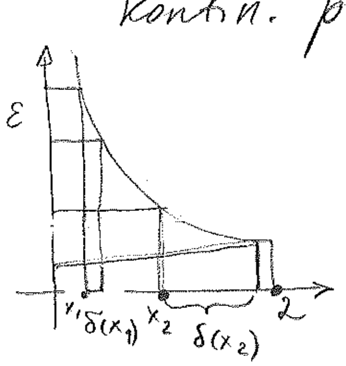
$\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1\}$
↖ kompakt.

Sats Om $f: D \to \mathbb{R}^p$ är kontin. och D är kompakt, så är f likformigt kontinuerlig på D,

dvs för varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ s.a.
$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ för alla $x, y \in D$ med $|x - y| < \delta$

OBS samma $\delta = \delta(x)$ funkar för alla $x, y \in D$!

Ex • $f(x) = \frac{1}{x}$ är kontin., men inte likformigt kontin. på $(0, 2]$ (ej kompakt)



<u>Sats</u> Låt $f: D \to \mathbb{R}$ vara kontin., där

D är bågvis sammanhängande

(dvs för varje $\bar{a}, \bar{b} \in D$ finns en kurva $t \to x(t)$, $t \in [0,1]$

med $x(0) = a$, $x(1) = b$ och $x(t) \in D$ $\forall\, t \in [0,1]$.)

För varje $a, b \in D$ antar f också alla värden mellan $f(a)$ och $f(b)$.