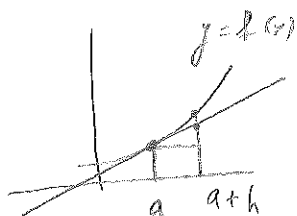


k. 2.2 Differentierbarhet

Ex i 1 dim.



$$f(a+h) - f(a) = f'(a) \cdot h + |h| \cdot g(h)$$

$$\text{där } \lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$$

Def Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$; $\vec{a}$ - en inre punkt av D .

f är differentierbar i pt $\vec{a}$ om

$\exists$ konstanter $A_1, \dots, A_n$ och en funktion $g(\vec{h})$ s.a.

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + |\vec{h}| g(\vec{h}) \quad (*)$$

$$\text{och } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} g(\vec{h}) = 0$$



Def f är differentierbar i en öppen mängd $D \subset \mathbb{R}^n$ om

f är differ: bar i varje punkt av D .

Sats 1 En differentierbar funktion är kontinuerlig.

Beris $(*) \Rightarrow \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = 0$



Sats 2 En differentierbar funktion är partiellt

deriverbar, och $f'_{x_j}(\vec{a}) = A_j$, $j=1, \dots, n$.

Da $|\vec{h}| = |t|$.

Beris I $(*)$, tag $\vec{h} = t \cdot \vec{e}_j = t \cdot (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Skriv om $(*)$ och dela med t :

$$\frac{f(\vec{a} + t \cdot \vec{e}_j) - f(\vec{a})}{t} = \frac{A_j \cdot t}{t} + \frac{|t|}{t} g(t \cdot \vec{e}_j) \rightarrow A_j \quad \text{då } t \rightarrow 0$$

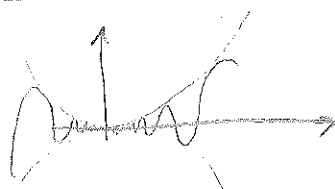
$$\downarrow t \rightarrow 0$$

$$f'_{x_j}(\vec{a})$$

Ex (utmaning)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

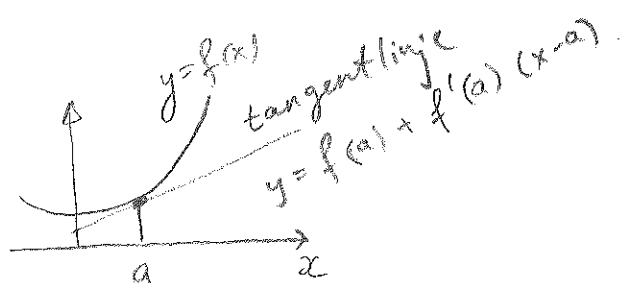
är f differentierbar? Är $f \in C^1$?



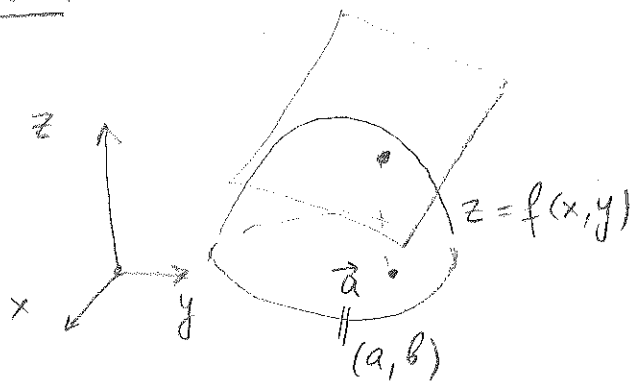
$$f'(x) = \begin{cases} -\cos \frac{1}{x} + 2x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Tangentplan

Ex (1-dim.)

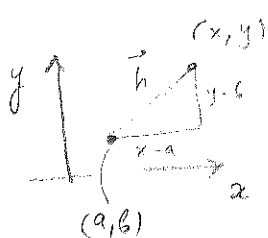


2-dim.



Tangentplan

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$



se (*)

Ex

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

Tangentplanen i punkten $(a,b,f(a,b))$ ges av

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) = -a^2 - b^2 + 1 - 2a(x-a) - 2b(y-b)$$

Tangentplan i pt. $(0,1,f(0,1))$ ges av

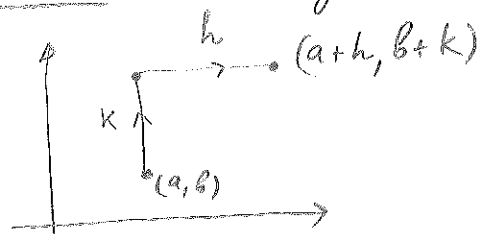
$$z = -0^2 - 1^2 + 1 - 2 \cdot 0(x-0) - 2 \cdot 1(y-1) = -2(y-1) = 2 - 2y$$

Def Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^n$ öppen.

f är klass C^1 om f är partiellt deriverbar och alla de partiella derivatorna $f'_1, \dots, f'_n$ är kontinuerliga i D . Vi skriver $f \in C^1$ eller $f \in C^1(D)$.

Sats 3 Varje funktion av klass C^1 är differentierbar.

Beris Vi ger beviset i fallet $n=2$.



Vi behöver visa att

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k$$

$$= |h| \cdot \rho(h) \quad \text{där} \quad \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \rho(h,k) = 0.$$

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \underbrace{f(a+h, b+k) - f(a, b+k)}_{(1)} + \underbrace{f(a, b+k) - f(a, b)}_{(2)}$$

Medelvärdessatsen ger:

$$\begin{cases} f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = f'_x(a+\theta_1 h, b+k) \cdot h & \text{där } 0 \leq \theta_1 \leq 1 \\ f(a, b+k) - f(a, b) = f'_y(a, b+\theta_2 k) \cdot k & \text{där } 0 \leq \theta_2 \leq 1 \end{cases}$$

$\theta_1 = \theta_1(h, k)$
 $\theta_2 = \theta_2(k)$

Eftersom f'_x, f'_y är kontinuerliga, får vi

$$\begin{cases} f'_x(a+\theta_1 h, b+k) = f'_x(a, b) + \rho_1(h, k) \\ f'_y(a, b+\theta_2 k) = f'_y(a, b) + \rho_2(k) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{där } \rho_1(h, k) \rightarrow 0 \\ \rho_2(k) \rightarrow 0 \end{matrix} \quad \text{då } (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

Vi får: $f(a+h, b+k) - f(a, b) = f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k$

$$+ \underbrace{\rho_1(h, k) \cdot h + \rho_2(k) \cdot k}_{= \sqrt{h^2+k^2} \cdot \rho(h,k)}$$

$$= \sqrt{h^2+k^2} \cdot \left(\underbrace{\frac{\rho_1(h,k) \cdot h}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{\rho_2(k) \cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{:= \rho(h,k)} \right)$$

OBS: $\rho(h, k) \rightarrow 0$ då $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ eftersom

$$\left| \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq 1, \quad \text{och } \rho_i(h, k) \rightarrow 0 \text{ då } (h, k) \rightarrow (0, 0).$$

Ex $f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{xy}\right) \quad x > 0, y > 0$

är differentierbar, eftersom de partiella derivatorna

$$\frac{df}{dx} = \cos\left(\frac{1}{xy}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2 y}\right) \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{1}{xy}\right) \cdot \left(-\frac{1}{xy^2}\right) \text{ är kontin.}$$

i $\{x > 0, y > 0\}$.

Uppgift 2.7. I termodynamiken används följande diff. ekvation:

$$T \cdot \frac{\partial p}{\partial T} - p = 0$$

där $p = p(V, T)$ (trycket p beror på volymen och temperaturen)

Lös ekvationen.

Lös. för varje fixerad V får vi en ODE:

$$T \frac{dp}{dT} = p \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} \Rightarrow \ln p = \ln T + f(V)$$

$$\Rightarrow \underline{p(V, T) = e^{f(V)} \cdot T = g(V) \cdot T} \quad \text{där } g(V) \text{ är en godtycklig funktion.}$$