

Kap 2.4 Gradient och riktningsderivata

Låt $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ vara en reellvärd differentierbar funktion

Def Gradienten av f i punkten $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ är

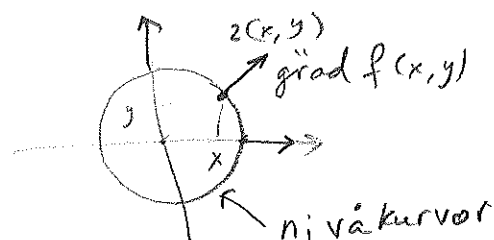
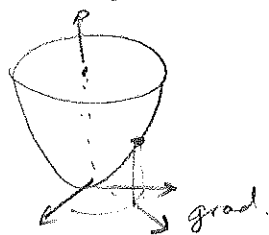
$$\text{grad } f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$$

Med $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ kan vi skriva

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f \quad (\text{operator } \vec{\nabla} \text{ verkar på funkt.})$$

Ex $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x, 2y)$$



Ex $f(\vec{x}) = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \left(\frac{2x_1}{2|\vec{x}|}, \dots, \frac{2x_n}{2|\vec{x}|} \right) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad \text{— enhetsvektor i riktn. } \vec{x}.$$

Med denna beteckning, $f(x)$ är differentierbar om

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \text{grad } f(\vec{x}) \cdot \vec{h} + |\vec{h}| \cdot g(\vec{h}) \quad \begin{array}{l} \text{där } g(\vec{h}) \rightarrow 0 \\ \text{då } \vec{h} \rightarrow 0. \end{array}$$

och om $f = f(x_1, \dots, x_n)$, $g = g(t)$, $g'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot h_2 + \dots \right)$

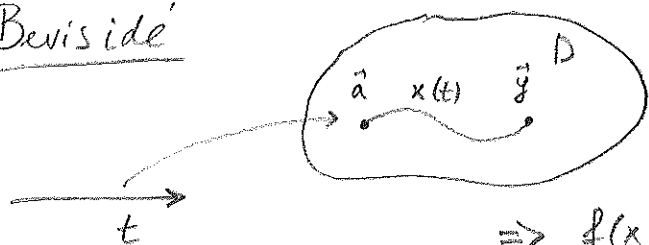
och $\frac{d}{dt} f(g(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot g_2'(t) + \dots = \text{grad } f \cdot \vec{g}'(t)$

Sats 5 Låt $D \subseteq \mathbb{R}^n$ vara en öppen, bägvis sammanhängande mängd, och f — C^1 funktion i D .

Om $\text{grad } f(\vec{x}) = 0 \quad \forall x \in D$, så $f(x) = \text{constant}$ i D .

Bevisidé

Fixera $\vec{a}$; $\vec{y}$ godtycklig.
 $x(t)$ mellan $\vec{a}$ och $\vec{y}$ kan väljas C^1 .



$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \text{grad } f \cdot \vec{x}'(t) = 0$$

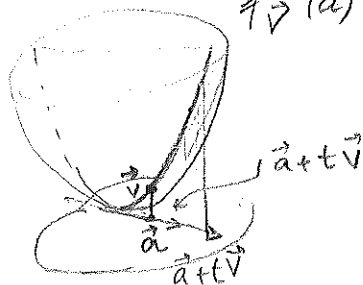
$$\Rightarrow f(x(t)) = \text{const.} \Rightarrow f(\vec{a}) = f(\vec{y}).$$

Riktningsderivata

Låt $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ har längd 1, dvs $|\vec{v}| = 1$

Def Derivatan av $f(x)$ i punkten $\vec{a}$ med avseende på riktningen $\vec{v}$ är

$$f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t}$$



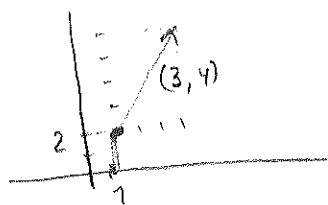
Ex om $\vec{v} = \vec{e}_j$, så $f'_{\vec{e}_j}(\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{a})$ — partiell derivata.

Sats 6 (sid. 78) Om f är differentierbar och $|\vec{v}| = 1$, så

$$f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \text{grad } f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$$

Varför Om $u(t) = f(\vec{a} + t\vec{v})$, så $f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = u'(0) = \text{grad } f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$
Kedjeregeln.

Ex $f(x, y) = x^3 e^y$. Bestäm derivatan av f i punkten $(1, 2)$ i riktn. $(3, 4)$?



$$\vec{v} = \frac{(3, 4)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ — enhetsvekt. i den givna riktn.}$$

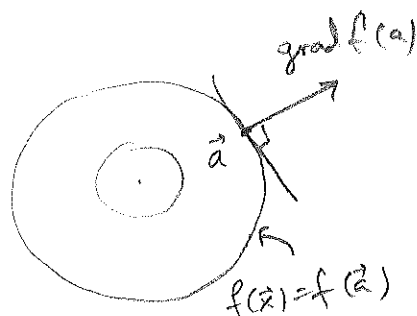
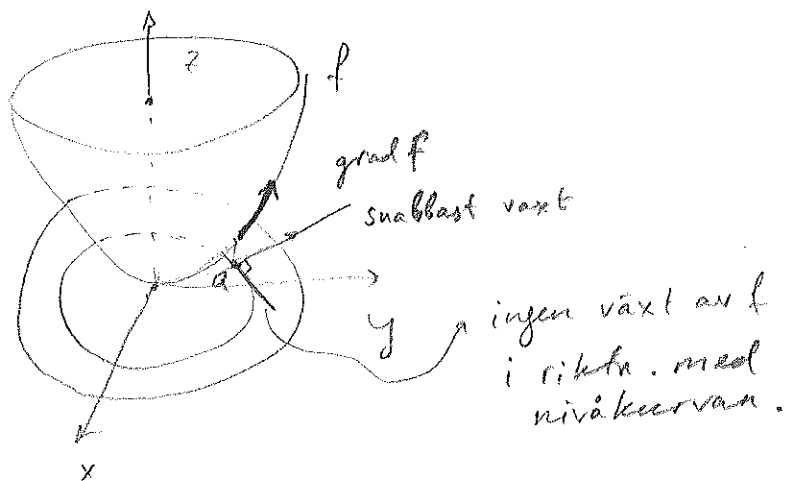
$$\text{grad } f(x, y) = (3x^2 e^y, x^3 e^y)$$

$$f'_{\vec{v}}(1, 2) = \text{grad } f(1, 2) \cdot \vec{v} = (3 \cdot e^2, e^2) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5} (9e^2 + 4e^2) = \frac{13}{5} e^2.$$

Sats 7 Gradienten $\text{grad } f(\vec{a})$ pekar i den riktn. i vilken funktionen växer snabbast i punkten $\vec{a}$, och den maximala tillväxt hastigheten är $|\text{grad } f(\vec{a})|$.

Varför $|f'_{\vec{v}}(\vec{a})| = |\text{grad } f(\vec{a}) \cdot \vec{v}| \leq |\text{grad } f(\vec{a})| \cdot \underbrace{|\vec{v}|}_{=1} = |\text{grad } f(\vec{a})|$

med likhet $f'_{\vec{v}}(\vec{a}) = \text{grad } f(\vec{a})$ om $\vec{v}$ och $\text{grad } f(\vec{a})$ är $\parallel$ och lika riktade



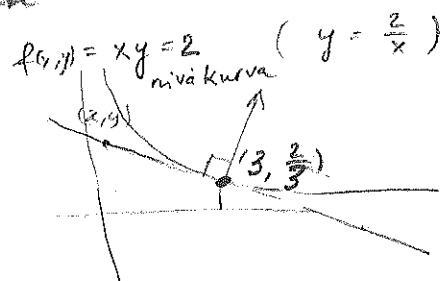
Sats 8 Låt $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en C^1 -funkt. med $\text{grad } f(\vec{a}) \neq \vec{0}$. Då är vektorn $(\text{grad } f(\vec{a}))$ normal till nivåytan $f(\vec{x}) = f(\vec{a})$.

Bevis Låt $\vec{x}(t)$ vara en C^1 -kurva i nivåytan $f(\vec{x}) = f(\vec{a})$ s.d. $\vec{x}(0) = \vec{a}$. Då gäller $0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\vec{x}(t)) = \text{grad } f(\vec{a}) \cdot \vec{x}'(0) = 0$.

«Implicita funktionsatsen medför att nivåytan är väldefinierad»

Ex. Bestäm tangentlinjen till kurvan

$xy = 2$ i punkten $(3, \frac{2}{3})$.



Lös. $f(x, y) = xy$

$$\text{grad } f(x, y) = (y, x)$$

Tangentlinjen har ekv. : $(x-3, y-\frac{2}{3}) \cdot \text{grad } f(3, \frac{2}{3}) = 0$,

$$\Leftrightarrow (x-3, y-\frac{2}{3}) \cdot (\frac{2}{3}, 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(x-3) + 3(y-\frac{2}{3}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x + 3y = 4$$

