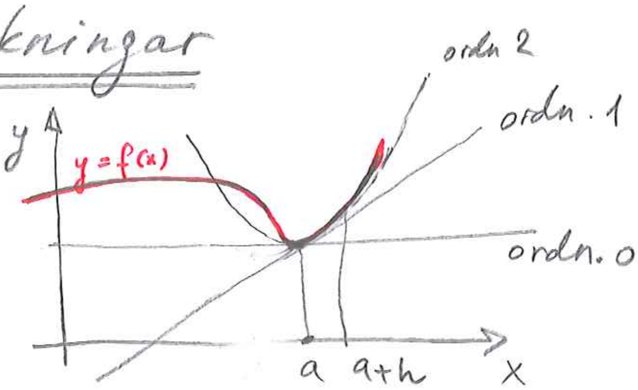
Kap. 2.6 Lokala undersökningar

Taylors formel



Ex $\boxed{\text{1-dim.}}$ Om $f \in C^3$ nära a,
så lokalt nära a gäller

$$f(a+h) - f(a) = f(a) + f'(a)\cdot h + \frac{f''(a)}{2} h^2 + O(h^3)$$

(där $\frac{O(h^3)}{h^3}$ är begränsad i en omgivning av origo)

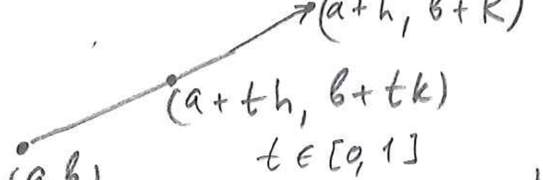
$\boxed{\text{2-dim}}$ Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara öppen, $(a,b) \in D$.

Sats 10 (sid. 94) Om $f: D \to \mathbb{R}$ är C^3, så gäller

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot h + f'_y(a,b)\cdot k +$$
$$\frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)\, h^2 + 2 f''_{xy}(a,b)\, hk + f''_{yy}(a,b)\, k^2\right)$$
$$+ \left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3 \cdot B(h,k)$$

där $B(h,k)$ är begränsad i en omgivning av origo.

Bevis Gör om problemet till 1-dim:



Fixera h, k.

$F(t) = f(a+th, b+tk)$, $t \in [0,1]$.

Kedjeregeln ger:

$$\begin{cases} F'(t) = f'_x(a+th, b+tk)\cdot h + f'_y(a+th, b+tk)\cdot k \\ F''(t) = f''_{xx}(\text{—''—})h^2 + 2 f''_{xy}(\text{—''—})hk + f''_{yy}(\text{—''—})k^2 \end{cases}$$

Eftersom $F \in C^3$, för alla $t \in [0,1]$ har vi

$$F(t) = F(0) + F'(0)\cdot t + \frac{F''(0)}{2!} t^2 + \frac{F'''(\theta t)}{3!} t^3 \quad \text{där } \theta \in [0,1]$$

$(\theta = \theta(h,k))$.

Spec., för $t = 1$ får vi:

$$f(a+h,\ b+k) = F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{6}F'''(\theta) =$$

$$= f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot h + f'_y(a,b)\cdot k + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(a,b)\,h^2 + 2 f''_{xy}(a,b)\,kh + f''_{yy}(a,b)\,h^2\right)$$

$$+ \underline{\underline{\frac{1}{6}F'''(\theta)}}$$

Satsen följer då

$$\frac{F'''(\theta)}{(\sqrt{h^2+k^2})^3} = \frac{f'''_{xxx}(a+\theta h,\ b+\theta k)\cdot h^3 + 3 f_{xxy}(\text{—"—})\,h^2k^2 + \ldots}{(\sqrt{h^2+k^2})^3}$$

är begränsad i en omgivning av origo, ty Ⓐ $f\ldots'''$ är kontin., och därför, begränsade, Ⓑ $\frac{|h|}{\sqrt{k^2+h^2}} \le 1$, $\frac{|k|}{\sqrt{k^2+h^2}} \le 1$.

<u>Ex</u>, Taylorutveckla $f(x,y) = x^2e^y$ kring punkten $(2,1)$.

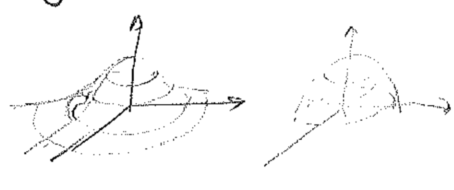
<u>Lösn.</u> $f'_x = 2xe^y$, $f'_y = x^2e^y$, $f''_{xx} = 2e^y$, $f''_{xy} = 2xe^y$, $f''_{yy} = x^2e^y$.

$$f(2+h,\ 1+k) = f(2,1) + f'_x(2,1)\cdot h + f'_y(2,1)k + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(2,1)h^2 + 2 f''_{xy}(2,1)hk + f''_{yy}(2,1)k^2\right)$$
$$+ (\sqrt{h^2+k^2})^3\cdot B(h,k)$$
$$= 4e + 4eh + 4ek + \frac{1}{2}(2eh^2 + 2\cdot 4ehk + 4ek^2) + (\sqrt{h^2+k^2})^3\cdot B(h,k)$$

där $B(h,k)$ är begränsad då $(h,k)\to(0,0)$

<u>Ex</u> Taylorutveckla $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ kring $(0,0)$.

$f'_x = -2xe^{-(x^2+y^2)}$, $f'_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}$



$f''_{xx} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2e^{-(x^2+y^2)}$, $f''_{xy} = 4xy\,e^{-(x^2+y^2)}$

$f''_{yy} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-(x^2+y^2)}$

$$f(h,k) = f(0,0) + f'_x(0,0)h + f'_y(0,0)h + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(0,0)h^2 + 2 f''_{xy}(0,0)hk + f''_{yy}(0,0)k^2\right)$$
$$+ (\sqrt{h^2+k^2})^3\cdot B(h,k) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(-2h^2 - 2k^2) + \text{rest} = 1 - (h^2+k^2) + (\sqrt{h^2+k^2})^3\cdot B(h,k).$$

Envarren: $e^{-t} = e^0 - e^0\cdot t + t^2\cdot \underset{\text{edd } t\to 0}{B(t)}$. $e^{-(x^2+y^2)} = 1 - (x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2\cdot B(t)$ då $t\to 0$.

Lokala extrempunkter

Låt $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

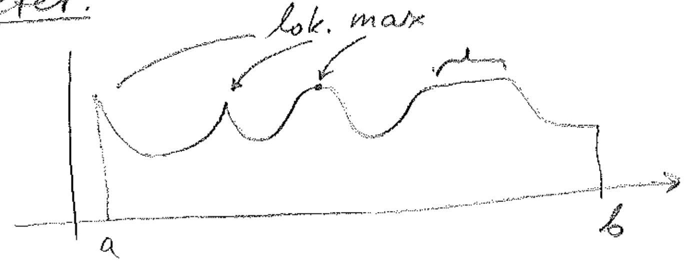
<u>Def</u> f har ett lokalt max. i $\vec{a} \in D$ om $\exists\ \delta > 0$

s.a. $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ $\forall\ x \in D$ med $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$.

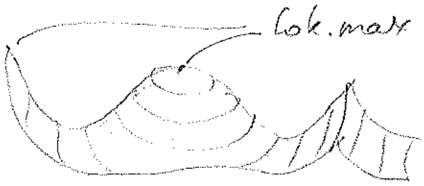
Om dessutom $f(\vec{x}) < f(\vec{a})$ $\forall\ \vec{x} \neq \vec{a}$, så har f ett <u>strängt</u> lok. max.

Lokala max. och min.-punkter kallas gemensamt för <u>lokala extrempunkter.</u>

<u>1-dim</u>



<u>2 dim</u>



<u>Sats</u> Om $f(\vec{x})$ har ett lokalt extremvärde i en inre punkt $\vec{a} \in D$ och f är partiellt deriverbar i $\vec{a}$, så
$$f'_{x_j}(\vec{a}) = 0, \quad j = 1, \ldots n.$$

<u>Bevis</u> Följer av motsvarande sats i 1 dim. applicerad på funkt. $x_j \mapsto f(a_1, \ldots x_j, \ldots a_n)$.

<u>Def</u> $\vec{x}$ är en <u>stationär punkt</u> för f om <u>$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = 0$</u>

<u>Ex</u> Bestäm de stationära punkterna för
$$f(x,y) = (3x - y)\, e^{-x^2 - y^2}.$$

<u>Lösn.</u>
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \big(3 - 2x(3x - y)\big) e^{-x^2-y^2} = (3 - 6x^2 + 2xy) e^{-x^2-y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \big(-1 - 2y(3x - y)\big) e^{-x^2-y^2} = (-1 - 6xy + y^2) e^{-x^2-y^2} \end{cases}$$

$$\operatorname{grad} f = 0 \iff \begin{cases} 3 - 6x^2 + 2xy = 0 \\ -1 - 6xy + 2y^2 = 0 \end{cases} \qquad y = \frac{6x^2 - 3}{2x}$$

$$-1 - \frac{(6x^2 - 3)}{2x} \cdot 6x + 2\left(\frac{6x^2 - 3}{2x}\right)^2 = 0$$

$$\iff -1-18x^2+9+\frac{9}{2x^2}\underbrace{(2x^2-1)^2}_{4x^4-4x^2+1} = -1-\cancel{18x^2}+9+\cancel{18x^2}-18+\frac{9}{2x^2}=0$$

$$\iff \frac{9}{2x^2}=10 \iff x=\pm\sqrt{\frac{9}{20}}=\pm\frac{3}{2\sqrt5}, \quad y=\pm\frac{6\cdot\left(\frac{9}{20}-3\right)}{2\cdot\frac{3}{2\sqrt5}} = \mp\frac{1}{2\sqrt5}$$

$$\begin{cases} x=\pm\frac{3}{2\sqrt5} \\ y=\mp\frac{1}{2\sqrt5} \end{cases}.$$

Vi har alltså $(x,y)=\left(\frac{3}{2\sqrt5}, -\frac{1}{2\sqrt5}\right)$ eller $x,y=\left(-\frac{3}{2\sqrt5}, \frac{1}{2\sqrt5}\right)$.

<u>Kvadratiska former</u> Låt $f: D\to\mathbb{R}$ vara $C^3(D)$, $D\subset\mathbb{R}^2$ öppen.

Vid en stationär punkt gäller:

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+O((h^2+k^2)^{3/2})$$

där
$$A=f_{xx}(a,b)$$
$$B=f_{xy}(a,b) \qquad (*)$$
$$C=f_{yy}(a,b).$$

<u>Def</u> Låt A,B,C vara konstanter. Då är

$$Q(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2=(h,k)\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$$

<u>en kvadratisk form.</u>

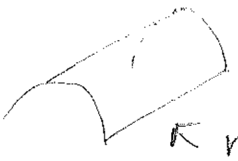
<u>Sats</u> Låt (a,b) vara en inre punkt i D som är en station. pt till f. Låt $Q=Ah^2+2Bhk+Ck^2$ där A,B,C som i $(*)$. Då

- Q positivt definit (dvs $Q(h,k)>0 \ \forall (h,k)\neq(0,0)$) $\Rightarrow f$ har strängt lok. min. i (a,b) 
- Q är negativt def. (dvs $Q(h,k)<0 \ \forall h,k \neq (0,0)$) $\Rightarrow f$ har ett strängt lok. max i (a,b) 
- Q <u>indefinit</u> (antar $\pm$ värden) (sadelpunkt) $\Rightarrow$  varken max eller min.

<u>OBS</u> Om Q är positivt (negativt) semidefinit, dvs

$Q(h,k) \geq 0$, men $Q(h,k) = 0$ för något $(h,k) \neq (0,0)$

kan vi inte dra några slutsatser.



← neg. semidef.

<u>Ex</u>
- $Q(h,k) = h^2 + k^2$ pos. def
- $Q(h,k) = -10h^2 - k^2$ neg. def.
- $Q(h,k) = h^2 - k^2$ indefinit
- $Q(h,k) = k^2$ pos. semidef.

<u>Ex</u> $f(x,y) = e^{-2y^2 - 4xy - x^4}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Bestäm alla lokala extrempunkter.

<u>Lösn.</u> Då e^t är strängt växande, räcker det att studera extrempunkter av $-(2y^2 + 4xy + x^4) =: g(x,y)$.

Station. punkter:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x} = 4y + 4x^3 = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 4y + 4x = 0 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} x^3 - x = 0 \\ x = -y \end{array}\right. \quad x = 0,\ x = \pm 1$$

$(x,y) = (0,0),\ (1,-1),\ (-1,1)$.

Vi behöver
$$g''_{xx}(x,y) = -12x^2$$
$$g_{xy}(x,y) = -4$$
$$g_{yy}(x,y) = -4.$$

Taylorutv. kring $(0,0)$: $g(h,k) = g(0,0) + \frac{1}{2}\left(g''_{xx}(0,0)h^2 + 2g''_{xy}hk + g''_{yy}k^2\right) + \dots$

$= -\frac{1}{2}(8hk + 4k^2) + \dots \quad = -2(2hk + k^2) = -2\left((h+k)^2 - h^2\right)$ <u>indef.</u>

Sadelpunkt.

Taylorutv. kring $(1,-1)$ och $(-1,1)$: $g(h,k) = g(1,-1) - \frac{1}{2}\left(12h^2 + 8hk + 4k^2\right)$
$g(-1,1)$

kv. f. $-2\left(2h^2 + (h+k)^2\right)$ neg. def.

$\boxed{\text{lok. max.}}$