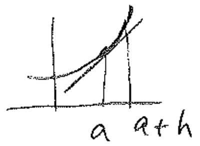
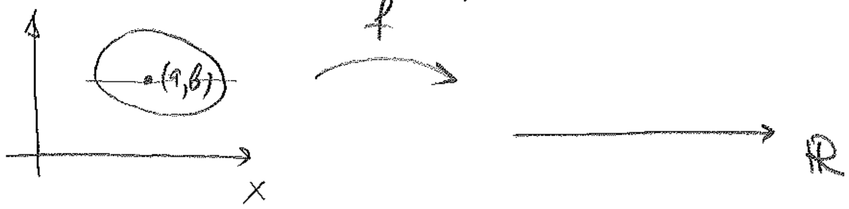
# Kap. 2. Differentialkalkyl för reelvärda funktioner

## K. 2.1 Partiella derivator

Kom ihåg: 1-dim  $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Låt $f(x,y)$ vara en funktion $D \to \mathbb{R}$ med $D \subset \mathbb{R}^2$.




**Def** $f$ är partiellt deriverbar med avseende på $x$ i en inre punkt $(a,b) \in D$ om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \quad \text{existerar.}$$

Gränsv. kallas för partiella derivatan, betecknas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad f_x(a,b) \quad \partial_x f(a,b), \quad D_x f(a,b), \ldots$$

Den partiella derivatan m a p $y$ är

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h} \quad \text{om gränsv. existerar.}$$

Vi säger att $f$ är partiellt deriverbar i $D$ (antas vara öppen) om $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ och $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ existerar $\forall (a,b) \in D$.

**Ex 1** $f(x,y) = x^3 y^6$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^6, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \cdot 6y^5.$$

(Verifiera: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3 \cdot y^6 - x^3y^6}{h} =$

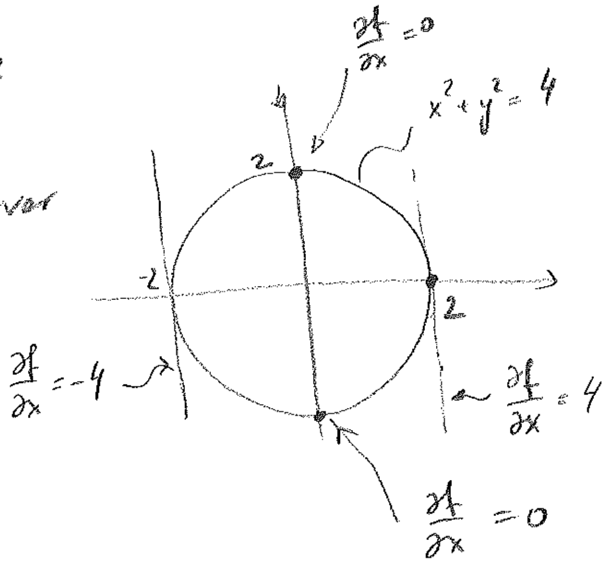
$= y^6 \cdot \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} = y^6 \dfrac{d}{dx} x^3 = y^6 \cdot 3x^2$ )

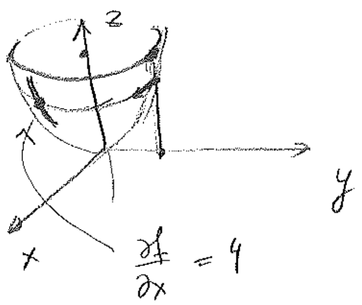
**Ex 2** $f(x,y,z) = e^{xy} \cdot \sin z$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot e^{xy} \sin z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy} \cdot \sin z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{xy} \cdot \cos z$$

Ex. $f(x,y) = x^2+y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$




nivåkurvor

---

Ex. Antag $f(x,y)$ är partiellt deriverbar på hela $\mathbb{R}^2$, och $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ för alla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Detta betyder: för varje fixerad $y \in \mathbb{R}$ $f(x,y)$ är en funktion av en variabel ( $x$ ) vars derivata är 0.

Då $f(x,y) =$ konstant (dvs, oberoende av $x$) som beror på $y$.

Vi har: $f(x,y) = \varphi(y)$, där $\varphi(y)$ är en deriverbar funktion.

På samma sätt, om $f = f(x,y,z)$ är part. deriverbar på hela $\mathbb{R}^3$ och $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \ \forall (x,y,z)$ i $\mathbb{R}^3$, så är $f$ oberoende av $x$, dvs $f(x,y,z) = \varphi(y,z)$ för någon part. deriverbar $\varphi(y,z)$.

(Se ex. på sidan 50-51 om $f(x,y)$ part. deriverbar i ett "U-format" område $D$.)

Ex. Funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{när } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{när } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

är partiellt deriverbar i varje punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(OBS: $f'_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$, $f'_y(0,0) = 0$ ).

Men $f(x,y)$ ej kontin. i $(0,0)$ eftersom $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar ej.

$f(t,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$