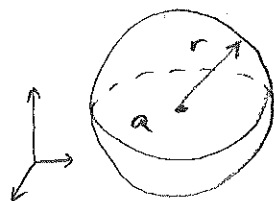
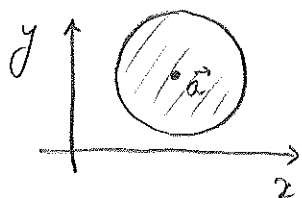


Fö 2

Kap. 1.3. Mängder i $\mathbb{R}^n$

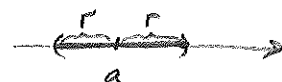
Def $\{x \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| < r\}$ är ett öppet klot i $\mathbb{R}^n$ med radie r och centrum $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

Ex Klot i $\mathbb{R}^2$



Klot i $\mathbb{R}^3$

Klot i $\mathbb{R}$



Def En mängd är en omgivning till $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ om U innehåller något öppet klot med centrum i $\vec{a}$.



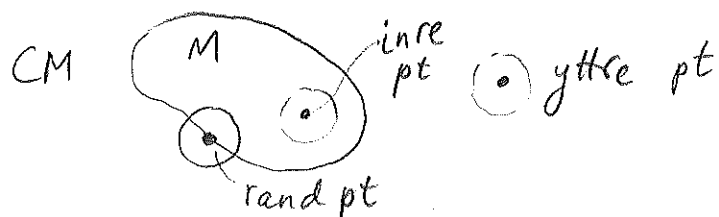
Def Låt M vara en mängd i $\mathbb{R}^n$. En punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ är en

- inre punkt till M om $\exists$ ett öppet klot kring $\vec{a}$ som ligger i M

- yttre punkt till M om ——— som ligger i komplementet C_M av M
($C_M = \mathbb{R}^n \setminus M = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin M\}$)

- randpunkt till M om varje öppet klot kring $\vec{a}$ innehåller punkter från såväl M som C_M .

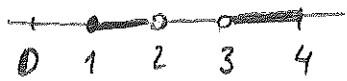
- $\partial M = \{ \text{randpunkter till } M \}$ kallas randen till M



Ex Randen till klotet $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| < 2\}$ är sfären $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| = 2\}$.

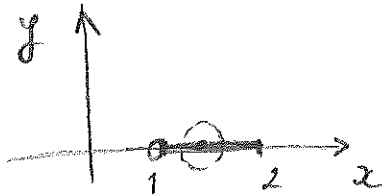
Ex Randen till $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| \leq 2\}$ är samma som ovan.

Ex Låt $I = [1, 2) \cup (3, 4] \in \mathbb{R}$



$$\partial I = \{1, 2, 3, 4\}$$

Ex Låt $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x \leq 2, y = 0\}$



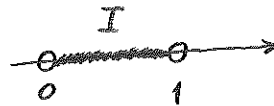
$$\partial I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, y = 0\}$$

I har inga inre punkter,
and $I \subset \partial I$.

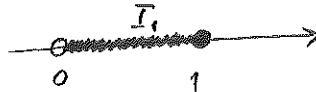
Def En mängd M är • öppen om $\partial M \subset \complement M$
• sluten om $\partial M \subset M$.

Ex Intervall $I \subset (0, 1)$ är öppet i $\mathbb{R}$

$$\partial I = \{0, 1\} \subset \complement I$$

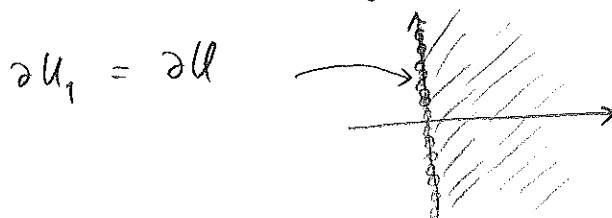


Ex Intervall $I_1 \subset (0, 1]$ är varken öppet eller slutet i $\mathbb{R}$



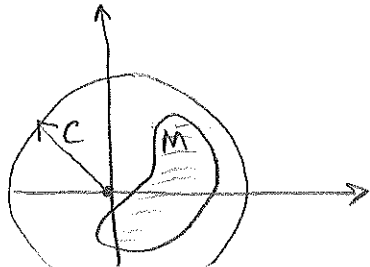
Ex Det öppna klotet $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| < r\}$ är öppet.
 $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| = r\} \subset \complement B$.

Ex halvplanet $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ är öppet



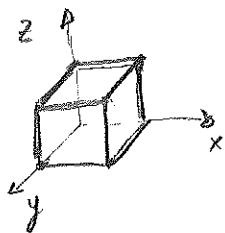
$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ är sluten.

Def En mängd $M \subset \mathbb{R}^n$ är begränsad om $\exists C > 0$ s.a.
 $|\vec{x}| \leq C \quad \forall x \in M$.



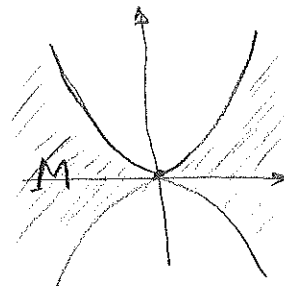
- $M \subset \mathbb{R}^n$ är kompakt om M är både sluten och begränsad.

Ex $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2\}$ är kompakt.



Ex $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x^2\}$

sluten
ej begränsad.



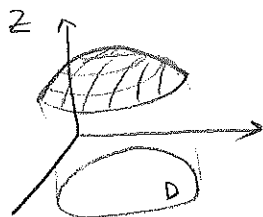
Ex $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ är kompakt.

Viktigt (bl.a. för att en kontinuerlig funktion på en kompakt mängd antar sitt största & minsta värde).

Kap. 1.4 Funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^p$

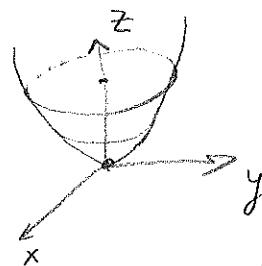
K. 1.4.1 Låt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

Def Grafen av f är mängden $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$



Ex $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$

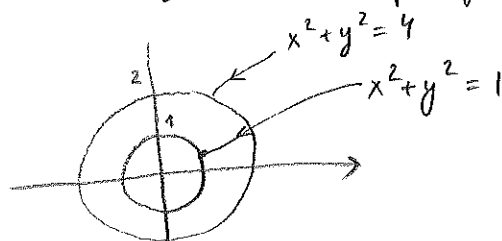
Graf = $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$



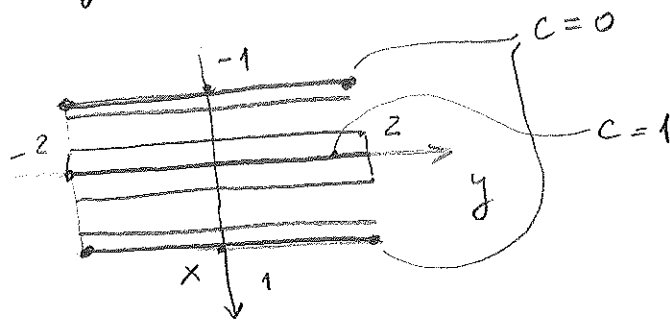
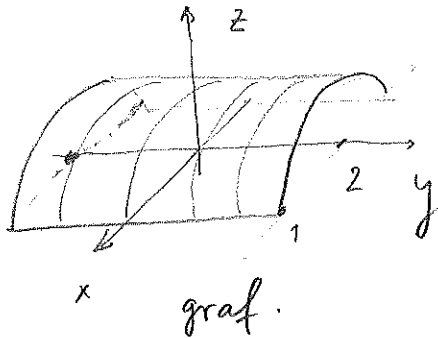
elliptisk
paraboloid

Nivåkurvor $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$

Ex



Ex $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1, |y| \leq 2$



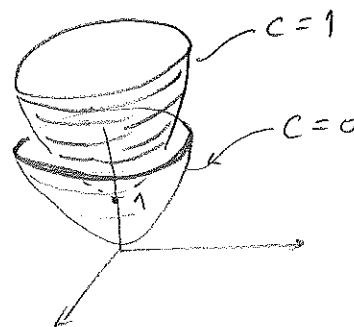
k. 1.4.2 $u = f(x,y,z)$; $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Nivåytor $f(x,y,z) = C$

Ex: $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$.

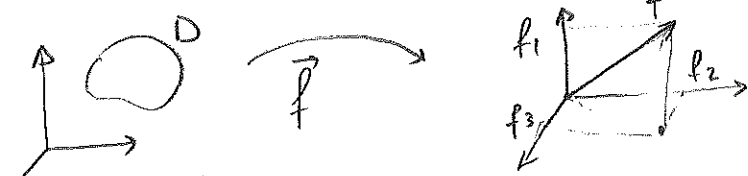
$f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = x^2 + y^2$

$f(x,y,z) = 1 \Leftrightarrow z = x^2 + y^2 + 1$



k. 1.4.3 Vektorvärda funktioner

$f: D \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$
 $D \subset \mathbb{R}^n$

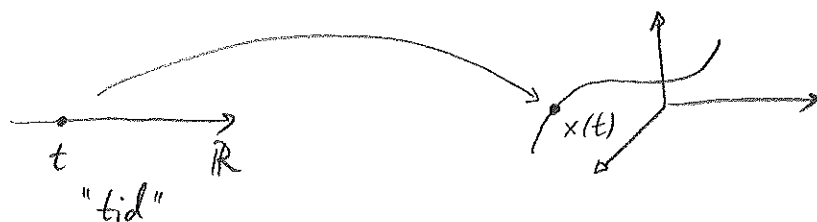


$\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$

k. 1.4.4 Kurvor

Def: En kurva i $\mathbb{R}^p$ är en funktion

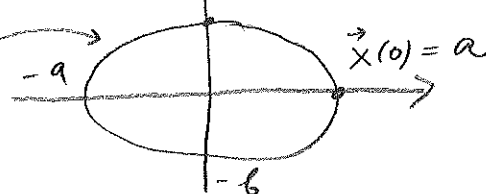
$t \rightarrow x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$
 $t \in \mathbb{R}$



Ex $x(t) = (a \cos t + b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$ $x(\frac{\pi}{2}) = b$

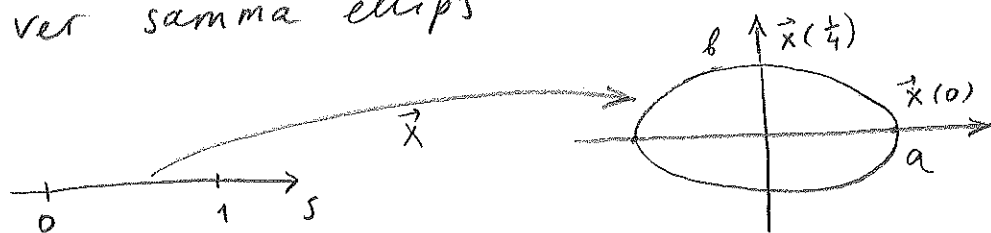
Beskriver en ellips i planet

(Vi parametriserade ellipsen med $t \in [0, 2\pi]$)



Ex $\vec{x}(s) = (a \cos 2\pi s, b \sin 2\pi s), \quad s \in [0, 1)$

beskriver samma ellips

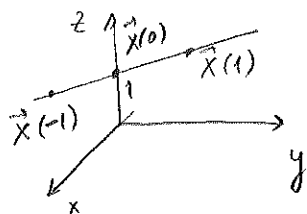


en annan
parametri-
sering
av samma
kurva.

Ex Samma ellips är nivåkurvan för

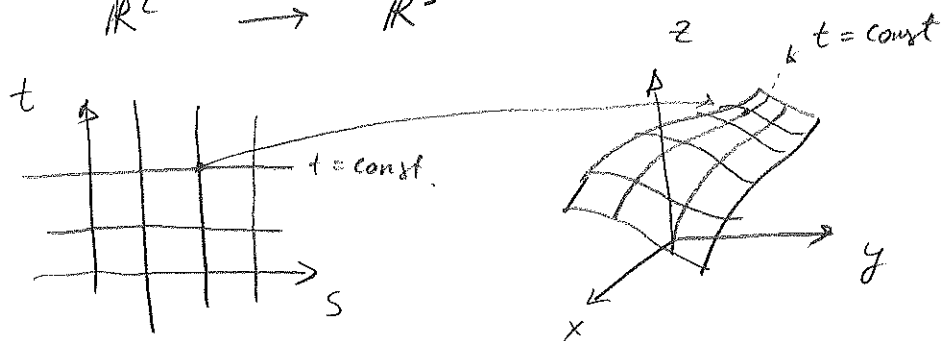
$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{med } c = 1.$$

Ex $\vec{x}(t) = (0, 0, 1) + t(-1, 1, 0)$



K. 1.4.5 Ytor

$$\begin{matrix} (s, t) & \longrightarrow & (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \end{matrix}$$

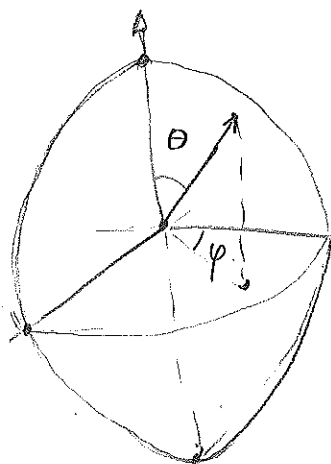
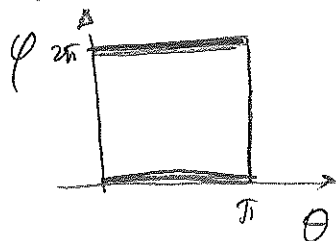


Ex Låt $R > 0$.

$$(\theta, \varphi) \longrightarrow (x, y, z) = (R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$$

beskriver en sfär med radie R och centrum i origo.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$



Sfäriska
koordinater

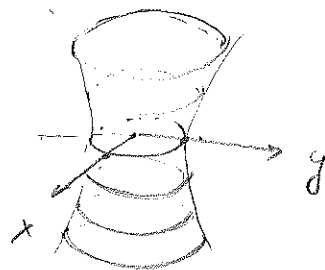
Andragsgradsytorna - se listan i boken, sid. 29.

Ex. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

$$x^2 + y^2 = 1 + z^2 \quad (\forall \text{ fixerad } z \text{ cirkel i } (x, y))$$

fixerad $x \neq \pm 1$ - hyperbel i (y, z)

$x = \pm 1$ - två linjer i (y, z)



enmantlad hyperboloid.

k. 1.46 Koordinatbyten

Ex (Polära koordinater)

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$(r, \varphi) \rightarrow (x, y)$$

$(0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ är en bijektiv avbildning

