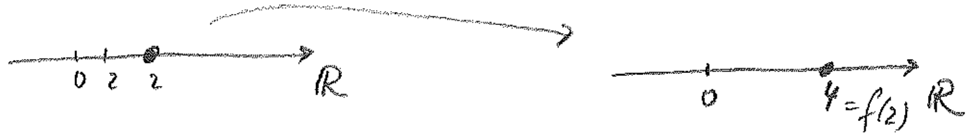
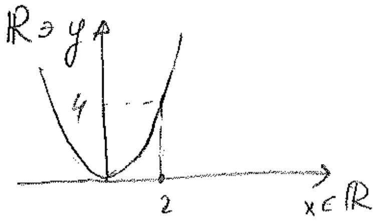
Fö 1 Funktioner av flera variabler

K. 1.1 Inledning.

Ex 1. (funkt. av 1 var.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

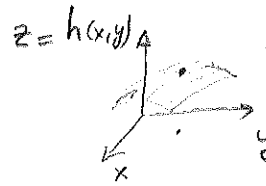
$$f(x) = x^2$$



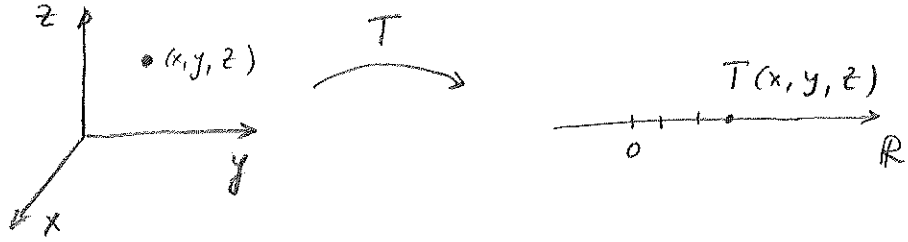


graf

Ex 2 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $h(x,y)$ = höjd över pt (x,y) på kartan



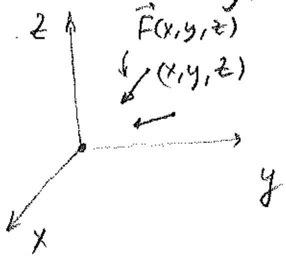
Ex 3. $T(x,y,z)$ = temperaturen i pt (x,y,z)



svårt med grafen ☺

Ex 4 kraftfält. $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\vec{F}(x,y,z)$ = gravitationskraft i pt (x,y,z)



$\vec{F}(x,y,z)$ utgör ett vektorfält

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z),\ F_2(x,y,z),\ F_3(x,y,z))$$

Ex 5 Tidsberoende hastighetsvektor

$V(x,y,z,t)$ = hastigheten för partikeln i punkten (x,y,z) vid tid t

$\vec{V}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

Ex 6 RGB-bild $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

K. 1.2 Rummet $\mathbb{R}^n$.

vekt. $\leftrightarrow$ punkt i $\mathbb{R}^2$

Def Låt $\vec{x} = (x_1, x_2 .. x_n)$ och $\vec{y} = (y_1, y_2 .. y_n)$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$.

② • $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + .. x_n \cdot y_n$ är skalärprodukten av $\vec{x}$ och $\vec{y}$.

OBS: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

① • x och y är parallella om $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.a. $\vec{y} = \lambda \vec{x}$.
$(\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0})$

Om $\lambda > 0$ sägs $\vec{x}$ och $\vec{y}$ ha samma riktning

$\vec{y} = \lambda \vec{x}$.

3 • $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + .. x_n^2}$ är längden av $\vec{x}$

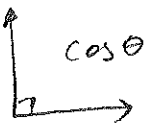
4 • $|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x-y)^2 + \dots (x_n - y_n)^2}$ är avståndet mellan $\vec{x}$ och $\vec{y}$.

6 • $\theta = \arccos\left(\dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}\right) \in [0, \pi]$ är vinkeln mellan $\vec{x}$ och $\vec{y}$

$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\theta$.

[θ väldefinierad pga Cauchy - Schwartz se nedan]

5 • $\vec{x}$ och $\vec{y}$ är ortogonala om $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$
(vi tar $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$).



$\cos\theta = 0$.

Ex 6. $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{x} - \vec{a}| = r\}$ är en cirkel med radie $r > 0$ och centrum $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$

$|x - a| = r \iff (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2$

Def $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| = r\}$ är en sfär i $\mathbb{R}^n$ med radie r och centrum $\vec{a}$.

<u>Sats 1</u> (Cauchy - Schwartz olikhet)

I $\mathbb{R}^n$ gäller: $|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$

$$-1 \leq \frac{x\cdot y}{|x|\cdot|y|} \leq 1 \leftarrow \cos\theta$$

och likhet inträffar precis när $\vec{x} \parallel \vec{y}$. $(\theta = 0)$

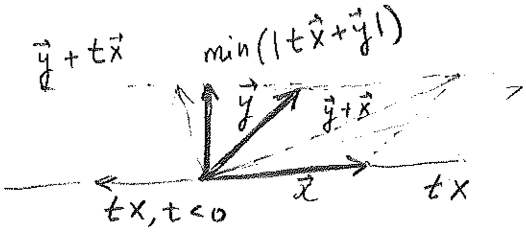
<u>Bevis</u> Antag att $\vec{x} \neq 0$ (annars är satsen uppenbar)

För alla $t \in \mathbb{R}$ gäller:

$$0 \leq (t\vec{x}+\vec{y})\cdot(t\vec{x}+\vec{y}) = t^2|\vec{x}|^2 + 2t\,\vec{x}\cdot\vec{y} + |\vec{y}|^2$$

$$= |\vec{x}|^2\Big(\underbrace{t^2 + 2t\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|^2} + \frac{(\vec{x}\cdot\vec{y})^2}{|\vec{x}|^4}}\, - \frac{(\vec{x}\cdot\vec{y})^2}{|\vec{x}|^4}\Big) + |\vec{y}|^2 =$$

$$= |\vec{x}|^2\cdot\left(t + \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|^2}\right)^2 + |\vec{y}|^2 - \frac{(x\cdot y)^2}{|x|^2} \geq 0 \quad \text{för alla } t \in \mathbb{R}$$



Om $x \not\parallel y$, har vi ">" för alla t.

Tag $t = -\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|^2}$

Vi får $|\vec{y}|^2 - \dfrac{(x\cdot y)^2}{|x|^2} \geq 0 \Rightarrow$

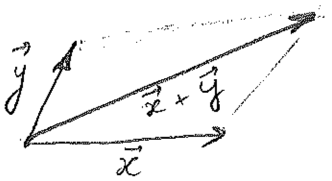
$\min(|t\vec{x}+\vec{y}|) = 0$

$(x\cdot y)^2 \leq |\vec{x}|^2\cdot|\vec{y}|^2 \Rightarrow$ C-S

Med likhet presis när $t\vec{x}+\vec{y} = 0$ för någon t (dvs då $\vec{x} \parallel \vec{y}$).

<u>Sats 2</u> (Triangelolikheten). I $\mathbb{R}^n$ gäller:

$|x+y| \leq |x| + |y|$ med likhet precis då $\vec{x} = \lambda\vec{y}$, $\lambda > 0$.



<u>Bevis</u> $|x+y|^2 = (x+y)\cdot(x+y) =$

$$= |x|^2 + 2\,x\cdot y + |y|^2 \underset{\text{C-S}}{\leq} |x^2| + 2|x|\cdot|y| + |y|^2$$

$= (|x| + |y|)^2$.

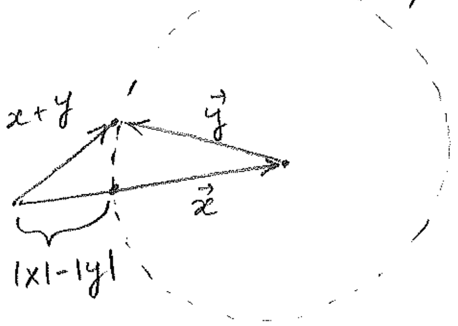
Sats (Omvända triangelolikheten)

I $\mathbb{R}^n$ gäller: $\left| |\vec{x}| - |\vec{y}| \right| \leq |\vec{x} + \vec{y}|$

Bevis • $|x| = |(\vec{x} + \vec{y}) - \vec{y}| \leq |\vec{x} + \vec{y}| + |\vec{y}| \Rightarrow$

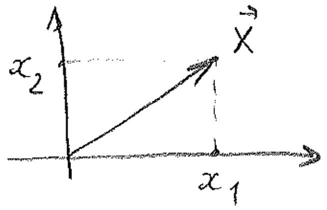
$|x| - |y| \leq |x+y|$.

• På samma sätt, $|y| - |x| \leq |x+y|$.



Sats För $\vec{x} = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ gäller

$|x_k| \leq |\vec{x}| \leq |x_1| + |x_2| + \dots |x_n|$.



I $\mathbb{R}^2$

• För $i=1,2$, $|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\vec{x}|$

• Låt $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$.

Då $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$,

$|\vec{x}| \leq |x_1 \cdot \vec{e}_1| + |x_2 \vec{e}_2| = |x_1| + |x_2|$.