

Lösningssförslag Tentamen SF1632/SF1683 25e Maj 2020

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.

Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–14, E–12, Fx–11.

Det finns möjlighet att komplettera betyget FX, information om detta publiceras på Kurshemsidan för SF1632/SF1683.

Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.

På skrivningens baksida finns det dock ett antal formler som ni får använda.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

Skillnader mellan SF1632 och SF1683: Kursmålen på dessa kurser är väldigt lika. På den här tentan så är alla uppgifter samma utom uppgift 4. Lösningssförslaget innehåller därför två olika varianter av uppgift 4, en för SF1632 och en för SF1683.

Del 1.

1. Lös följande initialvärdesproblem

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= u_t(x, t) && \text{för } x \in (0, \pi/2) \text{ och } t > 0 \\ u(0, t) &= u(\pi/2, t) = 0 && \text{för } t > 0 \\ u(x, 0) &= x && \text{för } x \in (0, \pi/2). \end{aligned}$$

[4 poäng]

Lösningssförslag fråga 1: Vi ansätter $u(x, t) = X(x)T(t)$ och sätter in detta i PDE:n vilket ger

$$X''(x)T(t) = X(x)T'(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \pm \lambda^2,$$

där λ måste vara en konstant eftersom VL är oberoende av t och mittenledet oberoende av x .

Vi får tre fall: I fall 1 när $\lambda = 0$ så kommer $X'' = 0$ vilket ger att $X(x) = ax + b$. Om $X(0) = X(\pi/2) = 0$, såsom randdata kräver, så ger $X(0) = 0$ att $b = 0$ och därför så är $a\pi/2 = X(\pi/2) = 0$, d.v.s. även $a = 0$. Så i fall 1 så är $X(x) = 0$. Dessa lösningar är triviala och därför ointressanta.

I fall 2, om $\lambda > 0$ och vi har “+”-tecken så kommer $X'' - \lambda^2 X = 0$ vilket ger att $X(x) = ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x}$. Om vi sätter in randdata $X(0) = X(\pi/2) = 0$ så får vi följande linjära ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda\pi/2} & e^{-\lambda\pi/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom determinanten till matrisen är $e^{-\lambda\pi/2} - e^{\lambda\pi/2} \neq 0$ när $\lambda > 0$ så får vi endast triviala lösningar i fall 2.

I fall 3, när $\lambda > 0$ och vi har “-”-tecken så får vi att

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = a \cos(\lambda x) + b \sin(\lambda x).$$

Randdatat $X(0) = 0$ implicerar att $a = 0$ och randdatat $X(\pi/2) = b \sin(\lambda\pi/2) = 0$ implicerar att antingen så är $b = 0$ (vilket ger triviala lösningar igen) och/eller så är $\lambda\pi/2 = \pi n$, för $n = 1, 2, 3, \dots$

Vi kan då slutsatsen att det enda fallet där vi får icke triviala lösningar är då $\lambda = 2, 4, \dots, 2n, \dots$ och då är

$$X(x)T(t) = b_n \sin(2nx)e^{-4n^2 t}.$$

För att uppfylla initialdata så använder vi att värmeledningsekvationen är linjär och ansätter att

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2nx)e^{-4n^2 t}.$$

Funktionen $u(x, t)$ kommer då att uppfylla differentialekvationen och randdata (givet att serien konvergerar). För att uppfylla initialdata så väljer vi b_n så att

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2nx) = x \text{ för } x \in (0, \pi/2).$$

För att hitta b_n så multiplicerar vi föregående ekvation med $\sin(2mx)$ och integrerar över $(0, \pi/2)$, detta ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\pi/2} \sin(2nx) \sin(2mx) dx = \int_0^{\pi/2} x \sin(2mx) dx. \quad (1)$$

För att beräkna VL så beräknar integralerna i serien var för sig. Vi börjar med att titta på fallet då $m \neq n$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2nx) \sin(2mx) dx = -\frac{1}{4m^2} \int_0^{\pi/2} \sin(2nx) \frac{d^2 \sin(2mx)}{dx^2} dx = \dots = \frac{n^2}{m^2} \int_0^{\pi/2} \sin(2nx) \sin(2mx) dx,$$

där jag av lättja inte skrev ut två partiella integrationer. Eftersom $n \neq m$ så kan vi slutleda att

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2nx) \sin(2mx) dx = 0.$$

Om $n = m$ så får vi att

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2nx) \sin(2mx) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(4mx)}{2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Sätter vi in detta i (1) så får vi att

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin(2mx) dx = \frac{-2}{m\pi} \int_0^{\pi/2} x \frac{d \cos(2mx)}{dx} dx = \\ &= \frac{-2}{m\pi} [x \cos(2mx)]_{x=0}^{x=\pi/2} + \frac{2}{m\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2mx) dx = \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{m}. \end{aligned}$$

Vi får därför att

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(2nx) e^{-4n^2 t}$$

vilket är vårt svar.

2. Givet att Laguerrepolyomen $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} D^n(x^n e^{-x})$ är en ortonormal bas på $L^2((0, \infty), e^{-x})$, d.v.s. på rummet med inre produkt given av

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(x) \overline{g(x)} e^{-x} dx$$

Vidare låt $f(x) = 3 + 2x$. Utveckla $f(x)$ i en Fourier-Laguerre serie

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(x).$$

[4 poäng]

Lösningförslag fråga 2: För varje ortonormal bas $e_0(x), e_1(x), e_2(x), \dots$ så kan man skriva

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Vi måste därför beräkna

$$\langle f, L_n \rangle. \quad (2)$$

Om vi observerar att $L_n(x)$ är ett polynom av grad n så inser vi att det räcker att beräkna (2) för $n = 0$ och $n = 1$. För $n = 0$ får vi

$$\begin{aligned} \langle f, L_0 \rangle &= \int_0^{\infty} (3 + 2x) e^{-x} dx = \\ &= \underbrace{[-3e^{-x}]_0^{\infty}}_{=3} - 2 \int_0^{\infty} x \frac{de^{-x}}{dx} dx = \\ &= 3 - 2 \underbrace{[xe^{-x}]_0^{\infty}}_{=0} + 2 \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 5. \end{aligned}$$

På samma sätt beräknar vi

$$\langle f, L_1 \rangle = \int_0^{\infty} (3 + 2x) D(xe^{-x}) dx = -2.$$

Vi får därför

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n = 5L_0(x) - 2L_1(x).$$

3. Antag att $\hat{g}(\omega) = \frac{\sqrt{|\omega|}}{1+\omega^4}$ och att

$$\widehat{f * g}(\omega) = \frac{i|\omega|e^{-|\omega|^{5/2}}}{1+\omega^4}.$$

Beräkna $f'(0)$.

Du får använda följande formler utan motivering:

1. $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x} dx.$

2. $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$

3. $\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$

4. $\hat{f}'(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$

5. $f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega$

6. om $h(x) = xe^{-\frac{3|x|}{2}}$ så kommer

$$\hat{h}(\omega) = -\frac{6i\omega}{((3/2)^2 + \omega^2)^2}.$$

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 3: Enligt 3 och den givna Fouriertransformen av g så får vi

$$\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega) \frac{\sqrt{|\omega|}}{1+\omega^4} = \frac{i|\omega|e^{-|\omega|^{5/2}}}{1+\omega^4} \Rightarrow \hat{f}(\omega) = i\sqrt{|\omega|}e^{-|\omega|^{5/2}}.$$

Om vi använder formel 4 så får vi att

$$\hat{f}'(\omega) = -\omega\sqrt{|\omega|}e^{-|\omega|^{5/2}}.$$

Inversformeln ger nu att

$$f'(0) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{-1}{2\pi} \int_{-R}^R \omega\sqrt{|\omega|}e^{-|\omega|^{5/2}} e^{i\omega \cdot 0} d\omega.$$

Men detta måste vara noll eftersom $e^{i\omega \cdot 0} = 1$ vilket gör att vi integrerar en udda integrand över ett jämt intervall. Det följer att **Svar:** $f'(0) = 0$.

4 (SF1632). Låt $a_0 = a_1 = 1$ och

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = f(n) \text{ för } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

där

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 4k \\ 1 & \text{om } n = 4k + 1 \\ 0 & \text{om } n = 4k + 2 \\ -1 & \text{om } n = 4k + 3 \end{cases}$$

Hitta ett uttryck för a_n som gäller för alla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Du får använda följande formler:

1. för $k \geq 0$

$$\mathcal{Z}(x(n+k)) = z^k X(z) - z^k x(0) - z^{k-1} x(1) - \dots - z x(k-1)$$

2. $\mathcal{Z}(b^n) = \frac{z}{z-b}$

3. $\mathcal{Z}(nb^n) = \frac{bz}{(z-b)^2}$

4. $\mathcal{Z}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = \frac{z}{z^2+1}$

5. $\mathcal{Z}(x(n-k)\Theta(n-k)) = z^{-k}X(z)$

där $\mathcal{Z}(x(n)) = X(z)$ står för z-transformen av $x(n)$ och

$$\Theta(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n \geq 0 \\ 0 & \text{om } n < 0. \end{cases}$$

Lösningförslag Fråga 4 (SF1632). Vi observerar att $f(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Så om vi tar z-transformen av relationen (3) får vi, där vi använder notationen $\mathcal{Z}(a_n) = A(z)$,

$$z^2 A(z) - 2z A(z) + A(z) \underbrace{-z^2 a_0 - z a_1 + 2z a_0}_{=-z(z-1)} = \frac{z}{z^2 + 1},$$

där vi satte in värdena $a_0 = a_1 = 1$. Vi kan skriva om detta som

$$A(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z^2+1)} + \frac{z}{z-1}.$$

En partialbråksuppdelning visar att

$$A(z) = 0 * \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(z-1)^2} + 0 * \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2+1} + \frac{z}{z-1}. \quad (4)$$

Vi ser nu, från formel 3 (med $b = 1$) och formel 5 (med $k = 1$), att

$$\mathcal{Z}^{-1} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{(z-1)^2} \right) = \frac{1}{2} (n-1) \Theta(n-1).$$

På samma sätt (från formel 4 och formel 5) får vi

$$\mathcal{Z}^{-1} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{z^2+1} \right) = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{(n-1)\pi}{2} \right) \Theta(n-1)$$

samt att

$$\mathcal{Z}^{-1} \left(\frac{z}{z-1} \right) = 1.$$

Tar inverstransformen av båda led i (4) så får vi

$$a_n = \frac{1}{2} (n-1) \Theta(n-1) - \frac{1}{2} \sin \left(\frac{(n-1)\pi}{2} \right) \Theta(n-1) + 1.$$

Svar fråga 3 (SF1632):

$$a_n = \left(\frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} \sin \left(\frac{(n-1)\pi}{2} \right) \right) \Theta(n-1) + 1.$$

4) (SF1683):

Lös följande initialvärdesproblem med Laplacetransformen

$$\begin{aligned} y''(t) + \frac{9}{2} y'(t) + 2y(t) &= h(t) \\ y(0) = 1 \quad y'(0) &= -4, \end{aligned}$$

där

$$h(t) = \begin{cases} t & \text{om } t > 2 \\ 0 & \text{om } t \leq 2. \end{cases}$$

Du får använda följande formler utan motivering.

1. $\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$
2. $\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-).$
3. $\mathcal{L}(\Theta(t-T)f(t-T))(s) = e^{-Ts} F(s)$ där $\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{för } t \geq 0 \\ 0 & \text{för } t < 0 \end{cases}$ är Heaviside funktionen och $T \geq 0$.
4. $\mathcal{L}(e^{-at})(s) = \frac{1}{s+a}$
5. $\mathcal{L}(t^n e^{-at})(s) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ för $n = 0, 1, 2, \dots$

Lösningsförslag Fråga 4 (SF1683). Vi observerar att vi kan skriva

$$h(t) = \Theta(t-2)g(t-2) \quad \text{med } g(t) = t+2.$$

Därför så kommer (formel 3)

$$\mathcal{L}(h(t))(s) = e^{-2s}G(s),$$

där

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathcal{L}(g)(s) = \int_0^\infty (t+2)e^{-st}dt = -\frac{1}{s} \int_0^\infty (t+2) \frac{de^{-st}}{dt} dt = \\ &= -\frac{1}{s} [(t+2)e^{-st}]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{2s+1}{s^2}. \end{aligned}$$

Om vi Laplacetransformerar differentialekvationen, använder formel 2 samt begynnelsedata, så får vi

$$s^2Y(s) - s + 4 + \frac{9}{2}(sY(s) - 1) + 2Y = \frac{2s+1}{s^2}e^{-2s}.$$

Vi kan skriva om detta som

$$Y(s) = \frac{2e^{-2s}}{s^2(s+4)} + \frac{1}{s+4}. \quad (5)$$

En standard partialbråksuppdelning ger att

$$\frac{2}{s^2(s+4)} = -\frac{1}{8} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{8} \frac{1}{s+4}.$$

Vi kan därför skriva (5) som

$$Y(s) = -\frac{1}{8} \frac{1}{s} e^{-2s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} e^{-2s} + \frac{1}{8} \frac{1}{s+4} e^{-2s} + \frac{1}{s+4}.$$

Om vi tar inverstransformen av båda led så får vi

$$y(t) = -\frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} e^{-2s} \right) (t) + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2} e^{-2s} \right) (t) + \frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s+4} e^{-2s} \right) (t) + \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s+4} \right) (t).$$

Genom att använda formel 4 (med $a=0$) och formel 3 (med $T=2$) så får vi

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} e^{-2s} \right) (t) = \Theta(t-2)$$

och på samma sätt får vi

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s+4} e^{-2s} \right) (t) = e^{-4(t-2)} \Theta(t-2),$$

och (om vi använder formel 5 med $n=1$ istället för formel 4) så får vi

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2} e^{-2s} \right) (t) = (t-2) \Theta(t-2).$$

Vi får därför att vårt svar blir

$$y(t) = -\frac{1}{8} \Theta(t-2) + \frac{1}{2} (t-2) \Theta(t-2) + \frac{1}{8} e^{-4(t-2)} \Theta(t-2) + e^{-4t} = e^{-4t} + \left(-\frac{9}{8} + \frac{t}{2} + \frac{1}{8} e^{-4(t-2)} \right) \Theta(t-2).$$

Del 2.

5. Låt $K_n(t)$ vara en följd av positiva integrationskärnor ("positive integration kernels") på $\mathbb{R}$ och definiera en följd av tempererade distributioner ϕ_n enligt

$$\phi_n[f] = \int_{\mathbb{R}} K_n(s) f(-s) ds.$$

Finns det någon tempererad distribution ψ så att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi'_n[f] = \psi[f]$$

för alla funktioner $f \in \mathcal{S}$ (här står $\mathcal{S}$ för Schwartzklassen)?

Om ψ existerar, beräkna ψ .

Lösningsförslag fråga 5: Definitionen av distributionsderivatan är $\phi'_n[f] = -\phi_n[f']$. Därför så kommer

$$\phi'_n[f] = - \int_{\mathbb{R}} K_n(s) f'(-s) ds = -K_n * f'(0).$$

Eftersom $f \in \mathcal{S}$ så kommer f att vara oändligt deriverbar vilket implicerar att f' är en kontinuerlig funktion.

Vi vet att om K_n är en följd positiva integrationskärnor så kommer, för varje punkt x_0 där f' är kontinuerlig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n * f'(x_0) = f'(x_0) = \delta_{x_0}[f'] = -\delta'_{x_0}[f],$$

där δ_{x_0} är Diracs deltafunktion med stöd i x_0 .

Vi kan därför dra slutsatsen att för alla $f \in \mathcal{S}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi'_n[f] = - \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n[f'] = - \lim_{n \rightarrow \infty} K_n * f'(0) = -f'(0) = \delta'_0[f].$$

Vårt svar blir således att en sådan distribution existerar och är lika med δ'_0 .

Svar fråga 5: En sådan distribution ψ existerar och $\psi = \delta'_0$.

6. Formulera och bevisa Riemann-Lebesgues Lemma.

[4 poäng]

Lösningsförslag fråga 6: Se Theorem 2.2 på sidan 25 i Vretblad.