Tentamen SF1632, 2021-01-13, 8:00-12:00

Institutionen för Matematik
SF1632 Kompleteringskurs i Diff. ekv. och transformer
13e Januari 2021
Examinator: John Andersson

Endast skrivdon (penna, linjal, gradskiva et.c.) är tillåtna. Specifikt så är miniräknare och formelsammling **inte** tillåtna.

Motivera alla dina lösningar om inget annat anges.

Preliminära betygsgränser: FX: 11, E: 12p, D: 14p, C: 16p, B: 19p, A: 21p.

Del 1.

Fråga 1) Om a_n, $n = 0, 1, 2, ...$, är en följd av reella tal så att

$$a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} = n,$$

$a_0 = 1$ och $a_1 = 0$. Beräkna talet a_{98}.

Du får använda följande formler utan motivering

1) $\mathcal{Z}(a_{n+k})(z) = z^k \left(A(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} - \frac{a_2}{z^2} - ... - \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}}\right)$

2) Om $b_n = na_n$, $n = 0, 1, 2, ...$ då kommer $B(z) = -zA'(z)$.

3) Om $a_n = 1$, $n = 0, 1, 2, ...$, då kommer $A(z) = \frac{z}{z-1}$.

4) Om $a_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\lambda^n\Theta(n-3)$ där $\Theta(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n \geq 0 \\ 0 & \text{om } n < 0 \end{cases}$ är Heavisidefunktionen, då kommer

$$A(z) = \frac{\lambda^3 z}{(z-1)^4}$$

5) Om $a_n = \frac{\lambda^n}{n}\Theta(n-1)$, där $\Theta(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n \geq 0 \\ 0 & \text{om } n < 0 \end{cases}$ är Heavisidefunktionen, då kommer

$$A(z) = \ln\left(\frac{z}{z-\lambda}\right).$$

I alla formler står $A(z)$, $B(z)$... för $\mathcal{Z}$-transformen av följderna a_n, b_n,...

[4 poäng]

Var god vänd!

Fråga 2a) Hitta en lösning $f(t)$ till följande ekvation

$$\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-2\tau}d\tau = 3te^{-2t}H(t) \tag{1}$$

där $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } t > 0 \\ 0 & \text{om } t \leq 0 \end{cases}$ är Heavisidefunktionen.

Ledtråd: *Observera att den ena gränsen i integralen är noll, kan du skriva om integranden på något sätt som ger dig en integral från $-\infty$ till ∞?*

[3 poäng]

b) Verifiera med en direkt beräkning att ditt svar från a) uppfyller (1).

[1 poäng]

Du får använda följande formler utan motivering:

1) $\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ där $*$ står för faltning (convolution).

2) $\mathcal{F}(tf(t))(\omega) = i\frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega}$

3) $\mathcal{F}(e^{i\omega_0 t}f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$

4) $\mathcal{F}(H(t)e^{-\alpha t})(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}$

där $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega)$ står för Fouriertransformen av $f(t)$.

Fråga 3a) Hitta en lösning till följande vågekvation

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} & \text{för } x \in (\pi, 2\pi) \text{ och } t > 0 \\ u(\pi, t) = u(2\pi, t) = 0 & \text{för } t > 0 \\ u(x, 0) = x & \text{för } x \in (\pi, 2\pi). \end{array}$$

[3 poäng]

b) Är din lösning unik? Motivera ditt svar genom att ge ett argument eller referera till en sats.

[1 poäng]

Fråga 4) Låt $f(x)$ vara en jämn funktion definierad på $[-\pi, \pi]$ så att $f(x) = \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$ för $x \in [0, \pi]$.

a) Beräkna Fourierserien av f.

[2 poäng]

b) Formulera Parsevals formel. Ingen motivering krävs.

[1 poäng]

c) Beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 9)^2}.$$

[1 poäng]

Var god vänd!

Del 2.

Fråga 5a) Låt $a \in (-\pi, \pi)$ vara ett givet tal och $u : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ en kontinuerlig och styckvis differentierbar funktion så att $u''(x) + 4u(x) = 0$ för alla $x \in (-\pi, a)$ samt alla $x \in (a, \pi)$. Betrakta u som en distribution på intervallet $(-\pi, \pi)$, d.v.s. för varje $\varphi \in C^\infty(-\pi, \pi)$ med kompakt stöd på $(-\pi, \pi)$ så är $u[\varphi]$ ett reellt tal.

Beräkna distributionen $u'' + 4u$ på $(-\pi, \pi)$. Ditt svar får innehålla u samt u'.

[2 poäng]

b) Hitta en distribution v, definierad för alla φ som i a) delen, som löser följande ekvation i distributionsmening

$$v'' + 4v = \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

där $\delta(x)$ är Diracs deltafunktion. D.v.s. hitta en distribution v så att

$$v''[\varphi] + v[\varphi] = \varphi(\pi/2),$$

för alla $\varphi \in C^\infty$ med kompakt stöd i $(-\pi, \pi)$.

[2 poäng]

Fråga 6) Låt $K_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vara en följd av oändligt deriverbara funktioner så att

1) $K_n \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)dx = 1$ för alla $n = 1, 2, 3...$

3) För varje $\epsilon > 0$ och $\delta > 0$ så existerar det ett $N \in \mathbb{N}$ så att om $n > \mathbb{N}$ så

$$\int_{|x|>\delta} K_n(x)dx < \epsilon.$$

Vidare låt $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion med kompakt stöd. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} K_n * \varphi(0).$$

Bevisa ditt svar.

Lycka Till!