



EXAMENSARBETE INOM TEKNIK OCH LÄRANDE,
AVANCERAD NIVÅ, 30 HP
STOCKHOLM, SVERIGE 2019

Kortspel, mer än bara ett tidsfördriv?

En fallstudie om gymnasieelevers resonemang vid
spel av ett kortspel med matematiskt innehåll

NORE MALMBERG

Card games, more than just a pastime?

A case study about high school students reasoning while playing a card game with mathematical content.

NORE MALMBERG

**EXAMENSARBETE INOM TEKNIK OCH LÄRANDE PÅ
PROGRAMMET CIVILINGENJÖR OCH LÄRARE**

Titel på svenska: Kortspel, mer än bara ett tidsfördriv?

Titel på engelska: Card games, more than just a pastime?

Handledare: Mikael Cronhjort, Kungliga Tekniska högskolan.

Ida Naimi-Akbar, Kungliga Tekniska högskolan.

Examinator: Arnold Pears, Kungliga Tekniska högskolan.

Sammanfattning

Studier har visat att det i den traditionella undervisningen i matematik råder brist på förutsättningar för eleverna att utveckla sin resonemangsförmåga på ett betydande sätt (Sidenvall, Lithner och Jäder, 2015; Tranbeck, 2010; Jäder, 2015). Denna brist har identifierats som en av anledningarna till att elever har det svårt på matematikutbildningar på högskolenivå (Lithner, 2011). Detta har lett till att alternativa arbetssätt har undersökts med avseende på hur de främjar elevernas användning av resonemangsförmågan (Liljekvist, 2014; Brunström, 2015). Syftet med denna studie är att undersöka hur gymnasieelevers resonemang ser ut och vad de innehåller när de spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasiets matematikkurser. En förståelse för detta kan bland annat möjliggöra en utvärdering av denna typ av spels relevans inom matematikundervisningen på gymnasialnivå. I denna studie studeras två gymnasieelevgruppers resonemang när de spelar ett kortspel som har ett matematiskt innehåll. Två strukturerade innehållsanalyser tillämpas i denna studie. Den första tillämpar kategorier som skapats utifrån tre olika ramverk för resonemang medan den andra utgår ifrån kategorier för ingenjörsmässiga förmågor som valts ur Conceive Design Implement Operate (CDIO) syllabus. Resultatet visar att ett flertal olika former av resonemang och ingenjörsmässiga förmågor förekommer bland elevernas resonemang. Det vanligaste är att eleverna i sina resonemang tillämpar kunskaper om generella matematiska regler och samband på ett imitativt sätt och resonemanget behandlar även samspelet mellan två variabler. Andelen kreativa resonemang var dock fortfarande högre i denna studie än i tidigare genomförda studier. Elevernas resonemang visar vidare främst på ingenjörsmässiga förmågor relaterat till initiativförmåga och beslutsfattning under osäkerhet. Utifrån resultatet görs bedömningen att det spel som studeras i denna studie är att betraktas som relevant för tillämpning inom matematikundervisningen, med några begränsningar. Mer generellt visar resultatet att när spel av den typ som studerats i denna studie används visar eleverna upp resonemangsförmågan på ett nyanserat sätt och även ingenjörsmässiga förmågor framkommer.

Nyckelord: Spel, kortspel, matematiska resonemang, ingenjörsmässighet.

Abstract

Studies have shown that in the traditional forms of mathematics education there is a lack of opportunity for students to improve their reasoning ability in a meaningful way (Sidenvall, Lithner och Jäder, 2015; Tranbeck, 2010; Jäder, 2015). This flaw has been identified as one reason for why students have troubles following the mathematics education at university level (Lithner, 2011). This has led to alternative methods being studied in regard to how they provide opportunities for the students to utilise their reasoning ability (Liljekvist, 2014; Brunström, 2015). The purpose of this study is to examine what the students' reasoning looks like and its content when they play a game with mathematical content in high school mathematics courses. Understanding this can, among other things, enable an assessment of how relevant this type of games is for use in high school mathematics education. In this study, two groups of high school students reasoning are observed when they play a card game that has mathematical content. Two structured content analyses are used in this study. The first one applies categories that have been created through the combination of three other frameworks, while the second one applies categories of engineering skills that have been selected from Conceive Design Implement Operate (CDIO) syllabus. The result shows that many different forms of reasoning and engineering skills were present in the students' reasoning. It is most common that the students' reasoning incorporates knowledge of general mathematical rules and relations in an imitative way that also includes the interaction between two variables. The proportion of creative reasoning was higher than those found in previous studies. Furthermore, the students' reasoning mostly reveals engineering skills related to taking initiative and decision making under uncertainty. With regards to the result the assessment is that the game that was studied in this study can be regarded as relevant for use in mathematics education, with some limitations. More generally, the result shows that when games of the type that has been studied here are used the students show the ability to reason in a nuanced way and engineering skills are also present.

Keywords: games, card games, mathematical reasoning, engineering skills.

Förord

Jag har sedan tidig ålder varit intresserad av spel av olika slag. Kortspel är dock den typ av spel jag är mest fascinerad utav. När vi då uppmuntrades att välja område för vårt examensarbete utifrån intresseområden var det inte svårt för mig att bestämma vad jag ville arbeta med. Det var dock inte säker att detta skulle vara ett lämpligt område att göra ett examensarbete om, men det faktum att du nu läser detta är ett bevis på att det gick.

Jag vill därmed börja med att rikta ett stort tack till Helena Lennholm, kursansvarige på Kungliga Tekniska högskolan, som var den första att höra mitt förslag på vad mitt examensarbete skulle handla om och även gav mig klartecken att fortskrida med det.

Sedan vill jag tacka mina två handledare från Kungliga Tekniska högskolan, Mikael Cronhjort och Ida Naimi-Akbar. Ni såg till att jag gav detta arbete den tid och omtanke det förtjänade. Utan er hade detta arbete endast varit en skugga av vad den nu har blivit och jag vill därför tacka er för handledning som gjorde detta möjligt.

Ett stort tack ska även riktas till de elever och lärare som deltog i denna studie och gjorde den möjlig. Utan ert deltagande hade detta examensarbete inte blivit av.

Nu vill jag ta mig tid att tacka min opponent Elinor Olsson för hennes grundliga granskning av mitt arbete och rapport där hon upptäckte ett flertal fel som behövdes åtgärdas. Jag kan bara hoppas att jag nu åtgärdat de flesta.

Ytterligare ett tack vill jag rikta till min examinerare Arnold Pears för den feedback på mitt arbete som resulterade i denna slutliga version.

För deras feedback och stöd vill jag tacka Annalill Tovås Malmberg, Atle Malmberg, Elias Groth, Lovisa Wetterstedt, Karl-Erik Malmberg, Markus Hansson och Oline Malmberg. Ni har alla hjälpt till med allt ifrån feedback på spelreglerna, genomläsning av min rapport, synpunkter på min presentation och diskussioner av olika aspekter av arbetet som, till slut, ledde till att jag genomförde välbehövliga förändringar.

Slutligen vill jag tacka alla de klasskamrater som gjorde min tid på KTH till en tid jag kommer att se tillbaka på med ett leende.

Tack.

Nore Malmberg

Hösten 2019.

Innehåll

1	INTRODUKTION	1
1.1	INLEDNING	1
1.2	BAKGRUND.....	1
1.3	SYFTE OCH FRÅGESTÄLLNING.....	8
1.4	HÅLLBARHET	9
2	TEORETISKT RAMVERK	9
2.1	MATEMATISKA RESONEMANG	9
2.2	INGENJÖRSMÄSSIGHET	20
2.3	FÖRVÄNTNINGAR FÖR RELEVANS INOM UNDERVISNING	24
3	METOD.....	25
3.1	BESKRIVNING AV METODER.....	25
3.2	STUDIENS GENOMFÖRANDE	27
3.3	URVAL	30
3.4	ETISKA ÖVERVÄGANDEN	30
3.5	AVGRÄNSNINGAR	32
4	RESULTAT	33
4.1	SAMMANFATTNING AV RESULTAT.....	33
4.2	ELEVERS RESONEMANG.....	33
4.3	ELEVERNAS INGENJÖRSMÄSSIGA FÖRMÅGOR	41
4.4	I FÖRHÅLLANDE TILL FÖRVÄNTNINGARNA	46
5	DISKUSSION	47
5.1	INTRODUKTION	47
5.2	DISKUSSION AV RESULTATET.....	48
5.3	METODDISKUSSION	56
5.4	FRAMTIDA FORSKNING OCH REKOMMENDATIONER.....	60
6	SLUTSATS	61
	REFERENSER.....	63
	BILAGOR	67
	BILAGA 1, SPELREGLER	67
	BILAGA 2, KORTDESIGN	76
	BILAGA 3, EXEMPELPARTI	84
	BILAGA 4, SPELPROTOKOLL.....	94
	BILAGA 5, DIAGRAM	95

1 Introduktion

1.1 Inledning

Spel av olika slag har blivit allt mer populärt i dagens samhälle och intresset är inte begränsat till endast de digitala varianterna. Brädspel har under de senaste åren blivit allt mer populärt världen över och även här i Sverige (Sundell, 2018). Det som verkar locka är den sociala sammankomsten och interaktionen, som annars tenderar att saknas eller vara något förändrad i de digitala spelen (Sundell, 2018).

Matematik brukar även vara en stor del av spel. Det kan studier genomförda av Baker et al. (2013), Tong, Yang, Han & Velasquez (2014) och Goldberg (2016) bekräfta. I dessa studier har två olika spel studerats närmare ur ett matematiskt perspektiv, för att visa på de matematiska aspekterna av dessa spel. Tong et al (2014) analyserade kortspelet 24 för att matematiskt avgöra hur förändringar i spelreglerna förändrade svårighetsgraden på spelet. Baker et al (2013) och Goldberg (2016) har studerat spelet SET och beskrivit dess matematiska representation i geometri och algebra.

I och med att brädspel blivit allt mer populärt och matematik tenderar att vara en del av dessa typer av spel, om än något undangömd, så framstår det för mig att det kan vara gynnsamt att använda sig av spel i matematikundervisningen.

1.2 Bakgrund

I detta delkapitel kommer tidigare forskning om matematiska resonemang, ingenjörsmässighet och tillämpning av spel som utbildningsverktyg att presenteras. I slutet ges även en beskrivning av det spel som kommer att undersökas i denna studie.

1.2.1 Resonemangsförmågan

Resonemangsförmåga är en av de sju matematiska förmågorna som utbildning i matematik på gymnasiet ska utveckla. De övriga är begreppsförmåga, procedurförmåga, problemlösningsförmåga, modelleringsförmåga, kommunikationsförmåga och relevansförmåga (Skolverket, 2011). Innebörden av dessa förmågor i relation till undervisningen har kommenterats av Skolverket (u.å) och Juter (2014). I dessa texter framkommer det hur förmågor sällan är renodlade utan samspelar med och går in i varandra.

Kramarski & Mevarech (2003) och Mevarech & Kramarski (2003) har i sina studier studerat inverkan av metakognitiv träning på matematikelevs studieresultat. De fann att den metakognitiva träningen som bestod av att lära eleverna att ställa och besvara metakognitiva frågor, frågor om vad de gjorde när de löste matematiska problem, bidrog till att öka elevernas resonemangsförmåga. Samtidigt sågs en förbättring av studieresultaten för de grupper som

ägnat sig åt metakognitiv träning och Kramarski & Mevarech (2003) och Mevarech & Kramarski (2003) drar därmed slutsatsen att det är förbättringen av resonemangsförmågan som leder till elevernas förbättrade resultat.

Lithner (2008) har presenterat ett ramverk för indelning av resonemang i två kategorier, imitativa och kreativa. Detta ramverk har baserats på empiriska data och har tillämpats i studier så som de genomförda av Sidenvall, Lithner & Jäder (2015), Tranbeck (2010), Jäder (2015) och Liljekvist (2014). I ramverket kännetecknas imitativa resonemang främst av att eleven kan förlita sig på utantillinlärning medan kreativa resonemang bland annat kännetecknas av att eleven måste tänka på ett för denne nytt sätt och befästa detta i inneboende matematiska egenskaper.

Studier har genomförts av bland annat Sidenvall et al. (2015), Tranbeck (2010) och Jäder (2015) där förutsättningar för elever att utveckla resonemangsförmågan har undersökts med avseende på Lithners (2008) ramverk. I sin studie undersökte Sidenvall et al. (2015) hur eleverna resonerade när de löste uppgifter i en lärobok i matematik. Resultatet visade att få uppgifter krävde kreativa resonemang av eleverna. Vidare visade undersökningen att användandet av kreativa resonemang kunde hämmas av sådant som att be en annan elev om hjälp. Även att en elev använder sig av facit i läroboken som ledning i lösningen av en uppgift identifierades som en bidragande orsak till bristen på kreativa resonemang.

Genom att studera läroböcker från 12 länder har Jäder (2015) i sitt arbete utrett hur förutsättningarna för elever att arbeta med kreativa resonemang ser ut. Resultatet visade att endast runt en tiondel av uppgifterna i läroböckerna från de olika länderna gav eleverna möjlighet att utveckla kreativa resonemang. När uppgifternas position i läroboken sedan togs med i beräkningen gjordes en uppskattning att utav de uppgifter eleverna gör är det endast runt en tjugondel som bidrar till utveckling av kreativa resonemang.

Tranbeck (2010) undersökte i sitt arbete hur kreativa resonemang förekommer i lärargenomgångar. Resultatet i den studien visade att det fanns brist på förutsättningar för eleverna att utveckla sin resonemangsförmåga vid lärargenomgångar.

Studier som de genomförda av Liljekvist (2014) och Brunström (2015) har i sin tur undersökt hur förutsättningar för elever att utveckla sin resonemangsförmåga kan förbättras. I Liljekvists (2014) arbete har uppgifter konstruerats utifrån Lithners (2008) ramverk för resonemang och sedan har dessa uppgifter testats på elever. Resultatet från Liljekvists (2014) arbete visar på att det är möjligt att konstruera uppgifter som stimulerar kreativa resonemang hos elever och att det i sin tur leder till att eleverna förbättrar sina resultat i lösningen av matematikuppgifter.

Brunström (2015) har undersökt hur användandet av digitala hjälpmedel kan användas för att stimulera resonemang bland eleverna i matematik. Brunström (2015) kom i sitt arbete fram till att sådant som att eleverna formulerar gissningar i ett tidigt skede, att eleverna inte får allt för mycket ledning och att eleverna känner sig bekväma med att använda det digitala verktyget på ett kreativt sätt bidrar till att eleverna utvecklar matematiska resonemang.

Elever använder sig i stor utsträckning av imitativa resonemang, vilket har identifierats som en möjlig anledning till att de kan ha svårt inom matematikutbildningar (Lithner, 2011). Detta då eleverna främst använder sig av resonemang som de blir instruerade till av läroboken, läraren eller klasskamrater utan att själva tillägga något nytt (Sidenvall et al, 2015). Detta anses leda till att eleverna endast får en ytlig förståelse för materialet vilket sedan leder till svårigheter längre fram i utbildningen (Lithner, 2011). Istället för att arbeta med uppgifter som de kan lösa genom att imitera skulle elever kunna arbeta med uppgifter där de behöver vara mer kreativa, då det skulle kunna leda till att de får en bättre förståelse för materialet (Lithner, 2011). I dagsläget är dock denna typ av uppgifter oftast reserverade för de svårare uppgifterna i läroböcker och det riskerar att leda till att inte alla elever gör dem (Lithner, 2011). Lithner (2017) menar däremot att det är möjligt att skapa uppgifter som kräver kreativitet från eleverna på alla nivåer. Det viktigaste är att eleverna inte har en färdig lösningsmetod för att lösa uppgiften och därmed måste föra, för eleven, nya resonemang för att lösa uppgiften (Lithner, 2017). Lithner (2017) förtydligar i sin artikel att problemet är att mängden kreativa resonemang behöver öka, inte att mängden av imitativa resonemang ska minskas.

Övergripande visar resultaten av dessa studier på att det finns ett behov av att utveckla arbetsformer som stimulerar elevernas utveckling av den matematiska resonemangsförmågan. Framförallt är det arbetsformer som stimulerar kreativa resonemang som eftersöks då det i de mer traditionella arbetsformerna tycks råda brist på detta.

1.2.2 Ingenjörsmässighet i utbildning

Undervisningen på de högskoleförberedande gymnasieprogrammen ska förbereda eleverna för fortsatta studier (Skolverket, 2011). För elever som läser högre kurser av matematik, så som Matematik 4, kan det innebära studier på ett ingenjörsprogram då de ses som en målgrupp för den sortens utbildning (Universitet- och högskolerådet, 2013). Det är därmed av intresse att ha en bild utav vad studenter kan förvänta sig att möta på dessa utbildningar.

Uppsala universitet (2005) har formulerat en definition av ingenjörsmässighet som de tillämpar internt. Definitionen är delad i två delar en som klargör vad som kännetecknar ingenjörsmässighet och en annan som förtydligar vad ingenjörsmässighet innebär. Definitionen tar upp sådant som att ingenjörsmässighet utmärks av att kunna tillämpa kunskap inom teknik, matematik och naturvetenskap eller inhämta ny kunskap för att lösa

problem, utveckla produkter eller metoder. Även förmågan att samarbeta med andra för att ta fram lösningar på komplexa problem tas upp som utmärkande för ingenjörsmässighet (Uppsala universitet, 2005).

Conceive Design Implement Operate (CDIO) är ett initiativ mellan tekniska högskolor i världen som skapat en generell övergripande läroplansstruktur som ska kunna tillämpas i samtliga ingenjörsutbildningar (Berggren et al, 2003). Inom detta samarbete genomförde Bankel et al (2003) ett arbete med att kartlägga de förväntade studieresultaten för ingenjörsstudenter. Resultatet av detta arbete blev den första versionen av CDIO syllabus, en lista över de kunskaper, förmågor, färdigheter och egenskaper en ingenjörstudent förväntas utveckla under sin utbildning. I CDIO syllabus presenteras fyra huvudområden;

1. *Ämneskunskaper*
2. *Individuella och yrkesmässiga färdigheter och förhållningssätt*
3. *Förmåga att arbeta i grupp och att kommunicera*
4. *Planering, utveckling, realisering och drift av tekniska produkter och system med hänsyn till affärsmässiga och samhällsliga behov och krav - innovationsprocessen* (Conceive Design Implement Operate, 2011a).

Vart och ett av dessa huvudområden delas sedan in i ett flertal mer ingående och detaljerade underområden (Conceive Design Implement Operate, 2011a; Conceive Design Implement Operate, 2011b)

I en fortsatt studie av Bankel et al (2005) undersöktes hur väl den befintliga undervisningen för ingenjörsstudenter överensstämde med de mål som ställdes upp i CDIO syllabus. Resultatet visade att målen i stor utsträckning redan behandlades i utbildningarna men inte alltid på ett effektivt sätt.

Woollacott (2009) har genomfört en validering av CDIO syllabus genom att jämföra den med ett annat dokument som uppfyller en liknande funktion, taxonomin av ingenjörskompetenser (the taxonomi of engineering competences). Woollacott (2009) menar att de två dokumenten fyller en liknande funktion, men eftersom de skapades utifrån två skilda designprinciper så anses det vara möjligt att validera CDIO syllabys genom att jämföra den mot taxonomin av ingenjörskompetenser. Resultatet visade att det fanns en god överensstämmelse mellan CDIO syllabus och taxonomin av ingenjörskompetenser.

Resultatet av dessa studier visar att de finns förmågor som förväntas utvecklas av blivande ingenjörer. Det skulle därmed vara av intresse att arbeta med några av dessa förmågor även under gymnasieutbildningen för att förbereda eleverna för fortsatta studier på ingenjörsutbildningar.

En fråga som kan ställas är om dessa ingenjörsmässiga förmågor framkommer när man spelar spel.

1.2.3 Spel som utbildningsverktyg

Användning av det som kallas gamification blir allt vanligare och förespråkas i undervisningen för dess möjlighet att engagera eleverna (Landers, 2014). Gameification skiljer sig dock till viss del från att använda spel i utbildningen, i gamification lyfter du endast in specifika attributet från spelvärlden, som exempelvis poäng eller narrativ. Användning av spel i undervisningen innebär, till skillnad från gamification, att fullskaliga spel som är designade med ett lärandemål i åtanke lyfts in i undervisningen (Landers, 2014). Denna form av användning av spel förespråkas även den för dess möjlighet att öka elevernas engagemang i sin utbildning (Landers, 2014). Att ett ökat engagemang leder till bättre lärande lyfts bland annat fram av visual engagement taxonomy (visuell engageringstaxonomi, min tolkning) där det framgår att elevens engagemang, som exempelvis handlingen att svara på den visuella representationen eller göra förändringar i den visuella representationen, är avgörande för hur väl ett visuellt hjälpmedel bidrar till elevens lärande (Naps et. al., 2003). På liknande sätt kan användning av spel och gamification bidra till att eleven interagerar med innehållet i utbildningen på ett aktivt sätt, vilket då kan öka deras engagemang för utbildningen och därigenom öka deras utbildningsprestationer.

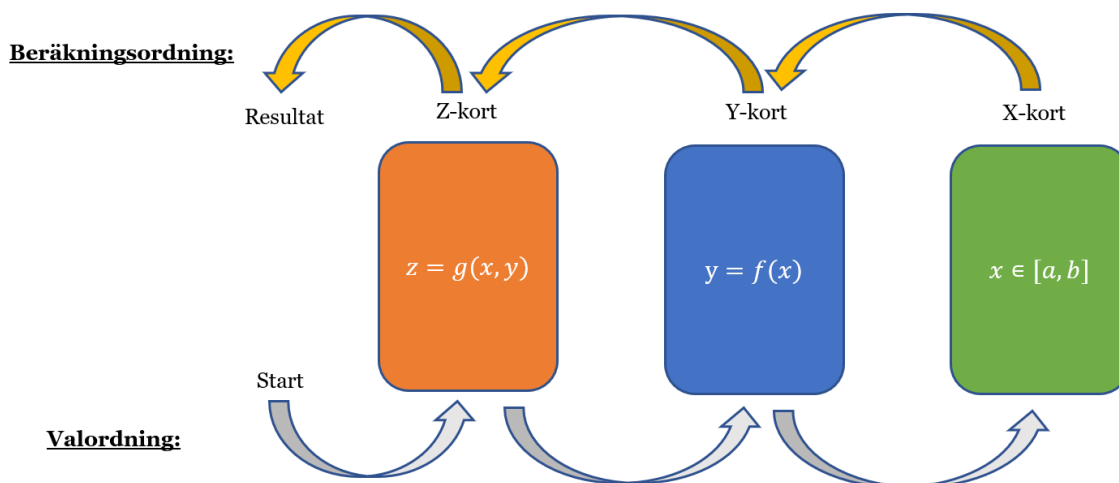
Ett flertal lärospel, spel utvecklade för undervisning med ett lärandemål i åtanke, har utvecklats för olika ändamål och målgrupper. Spel som de utvecklade av Turkey, Adinolf & Tirthali (2012) och Chen, Kuo, Chang & Heh (2009) är riktade mot grundskoleelever medan spel som de utvecklade och testade av Galarza (2017), Barclay, Jeffres, & Bhakta (2011), Samuelson (2018) och Afari, Aldridge & Fraser (2012) riktar sig till studenter på gymnasie- och eftergymnasialnivå. Dessa spel har även designats med olika ändamål i åtanke. Spelet av Barclay et al (2011) är tänkt att ge elever möjlighet att träna på faktakunskaper medan spelet av Chen et al (2009) är tänkt att agera som ett motivationsverktyg för eleverna. Svårighetsgraden varierar mellan dessa men det finns få spel som behandlar det matematiska innehållet som eleverna förväntas tillgodogöra sig under sin gymnasiala utbildning. Charoenying (2010) har i sitt arbete utformat riktlinjer för hur ett spel skall designas för att vara lämpligt som utbildningsverktyg. Trots att allt detta har gjorts konstaterar Husain (2011) att det finns få spel som tillämpas som utbildningsverktyg som efterliknar de kommersiella spelen som finns på marknaden.

Det skulle alltså vara av intresse att studera ett spel som primärt designats för att vara ett spel, snarare än ett utbildningsverktyg, men där eleverna har möjlighet att använda sig av matematiska och ingenjörsmässiga förmågor.

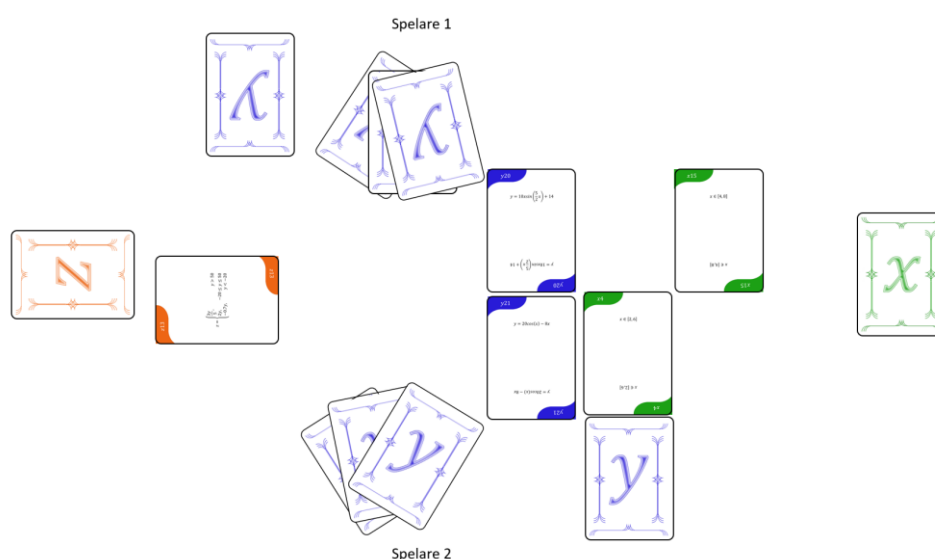
1.2.4 Spelet XYZ

Spelets gång

Spelet XYZ är ett kortspel som använder sig utav tre olika sorters kort som fördelas i totalt fyra olika kortlekar. Varje spelare har en individuell Y-kortlek med Y-kort, sedan finns en gemensam Z-kortlek med Z-kort och en gemensam X-kortlek med X-kort. Under spelets gång väljer spelarna vilka X-, Y- och Z-kort de vill spela under partiet med målet att få det största z-värdet. Först väljs gemensamt ett av tre möjliga Z-kort att spela kring, sedan väljer varje spelare ett Y-kort från sin hand att spela med och slutligen får spelarna välja varsitt X-kort utav tre möjliga. X-korten har intervall skrivna på sig medan Y- och Z-korten har olika funktioner. x-värdet slumpas i intervallet, y-värdet beräknas med x-värdet som indata i funktionen på Y-kortet och z-värdet beräknas sedan slutligen med y-värdet och eventuellt x-värdet som indata i funktionen på Z-kortet. Figur 1 illustrerar ordningen för val och beräkning, figur 2 visar sedan ett exempel på hur spelplanen kan se ut i slutet av ett parti. Reglerna och mer ett mer utförligt exempelparti går att hitta i bilaga 1 respektive bilaga 3.



Figur 1, Illustration av valordning av X-, Y- och Z-kort samt beräkningsordningen för att få fram z-värdet.



Figur 2, Exempel på utseendet av spelplanen efter en omgång.

Design

Spelet XYZ är en nerskalad prototyp av ett spel som designats av Nore Malmberg där endast de underliggande matematiken har lämnats kvar. Spelet är däremot inte designat med ett lärandemål i åtanke utan tanken har varit att utöka möjliga spelelement genom att utöka omfånget av matematiskt innehåll som används. Resultatet är att spelarna snarare förväntas behärska matematiken som är representerad, istället för att lära sig den genom att spela spelet. Spelet kan därmed agera som en katalysator som får spelaren att börja reflektera kring den matematik som används för att förbättra sitt spelresultat men spelet är inte i sig designad för att primärt utveckla matematiska förmågor.

För att spelet inte skulle bli allt för förutsägbart har ett flertal designval gjorts för att motverka detta. Den första åtgärden är att skapa ett slumpmoment i vilka kort spelarna har tillgång till. Genom att korten dras från en kortlek och inte alla kort är tillgängliga gör det att spelarna inte alltid har det "rätta" kortet att spela. Den andra åtgärden är ordningen av valet av kort. Genom att vara tvungen att börja med målet, Z-kortet, innan man är helt säker på vilka vägar man har möjlighet att gå, Y- och X-kort, gör att en osäkerhet skapas vid valet av kort. Den tredje åtgärden är slumpningen av ett tal i intervallet på X-kortet. Detta skapar en ytterligare osäkerhet men skapar även ett tillfälle där duktiga matematiker kan ta tillbaka en del av kontrollen, se spelreglerna för hur x-värdet slumpas i bilaga 1. Allt detta gör att det inte alltid går att på förhand vara helt säker på vilka val av kort är bäst, vilket var tanken för att se till att det inte är förbestämt vem som kommer att vinna.

Just prototypen Spelet XYZ har designats för att vara ett spel där matematik som återfinns i gymnasiets matematikkurser tillämpas. Korten har bland annat uttryck som innehåller termerna $\sin$, $\cos$, $\tan$ och $\ln$ som alla är uttryck som eleverna vanligtvis möter för första gången i matematikkurser på gymnasialnivå. Även andra uttryck så som räta linjens funktion och andragsgradsfunktioner finns med. För ytterligare information om kortens utseende se bilaga 2.

Spelet som prototypen Spelet XYZ bygger på är även designat för att vara expanderbart och möjligt att strukturera om. Tanken är att låta spelarna själva skapa sina kort som de vill använda, så länge de följer vissa riktlinjer. Spelet kan även struktureras om, till exempel är det fullt möjligt att ändra ordningen som korts väljs/spelas vilket kan förändra spelets förutsättningar.

1.3 Syfte och frågeställning

1.3.1 Syfte

Syftet med denna studie är att undersöka hur resonemangsförmågan och ingenjörsmässiga förmågor visar sig när elever spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser. Vidare är syftet även att utvärdera hur relevant användning av denna typ av spel är för gymnasieundervisningen.

Förståelse om hur resonemangsförmågan visar sig när eleverna spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser gör det möjligt att bland annat avgöra hur denna typ av spel adresserar de problem kring bristande förutsättningar för resonemang, främst kreativa resonemang, som identifierats i tidigare studier. Vidare kan information om hur ingenjörsmässiga förmågor framkommer när spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser spelas bidra till en förståelse för hur denna typ av spel kan användas för att förbereda eleverna för vidare studier inom ingenjörsutbildningar. Allt detta kan i sin tur göra det möjligt att utvärdera hur relevanta spel av denna typ kan vara att använda i matematikundervisningen på högskoleförberedande gymnasieprogram.

1.3.2 Frågeställningar

För att uppnå syftet med den här studien utformades tre frågeställningar som ämnas besvaras.

1. Vilka former av resonemang använder sig eleverna utav när de spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser?
2. Vilka ingenjörsmässiga förmågor uppvisar elevernas resonemang när de spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser?
3. Hur är användning av det spel som studerats relevant inom matematikundervisningen på gymnasiet?

1.4 Hållbarhet

Ur ett hållbarhetsperspektiv finns det riktlinjer för att skapa en inkluderande utbildning (United Nations Development Programme, u.å). Genom att undersöka alternativa utbildningsmoment kan det vara möjligt att utvidga de arbetsmetoder som lärare kan använda sig utav i sin undervisning, vilket i sin tur kan leda till att undervisningen blir mer inkluderande. Spelet XYZ och det spel det är en prototyp av har även stora möjligheter att skraddarsys till spelarens förutsättningar. Samtidigt finns det potential för att en kortlek som till exempel endast byggts upp av kort med linjära uttryck kan vinna över en kortlek med mer komplicerade trigonometriska uttryck. Detta öppnar upp möjligheter för spelare med olika förutsättningar att spela tillsammans, vilket skapar en inkluderande miljö.

2 Teoretiskt ramverk

I det här kapitlet kommer först definitionen av matematiska resonemang att behandlas. Efter det följer en introduktion till tre ramverk för kategorisering av matematiska resonemang och hur dessa kommer att kombineras i denna studie för att ge en mer komplett bild av elevernas resonemang. Sedan behandlas ett ramverk för identifiering och kategorisering av ingenjörsmässighet. Slutligen formuleras de förväntningar som de olika ramverken har för att ett arbetssätt, som till exempel spelandet av spel, ska vara relevant för användning inom undervisning.

2.1 Matematiska resonemang

För att kunna besvara den första frågeställningen behöver klargöras vad ett matematiskt resonemang är.

Skolverket (u.å) har i sina kommentarer till kursplanen i matematik för gymnasieskolan definierat vad som menas med resonemangsförmåga i skolundervisning.

”Resonemangsförmågan innebär att kunna föra matematiska resonemang som involverar matematikens begrepp och metoder och utgör lösningar på problem och modelleringsituationer. Att föra ett resonemang innefattar även att själv och tillsammans med andra till exempel testa, föreslå, förutsäga, gissa, ifrågasätta, förklara, finna mönster, generalisera eller argumentera. Det innefattar även att kunna formulera och allmänt undersöka hypoteser samt genomföra bevis i tal och skrift. Detta inkluderar att uppmärksamma betydelsen av och kunna redogöra för de bärande idéerna i ett matematiskt bevis och inse skillnader mellan gissningar och välgrundade påståenden.” (Skolverket, u.å, s.3)

En ytterligare definition av resonemang kommer från Lithner (2008) som kortfattat definierat resonemang som;

”... resonemang är den tankegång som används för att producera hävdande och nå en slutsats i uppgiftslösning. Det är inte nödvändigtvis baserat på formell logik, och är därmed inte begränsat till bevis, och kan till och med vara inkorrekt så länge det finns några vettiga (för resoneraren) skäl som grund för det.”
(Lithner, 2008, s.257, min översättning)

Båda dessa formuleringar är överens om att resonemang inte nödvändigtvis endast handlar om att producera bevis, utan har valt att öppna upp begreppet till att inkludera mindre strukturerade tankegångar (Skolverket, u.å; Lithner, 2008). Lithner (2008) går möjligtvis aningen längre då han tydligt även tillåter resonemangen att vara inkorrekta så länge resoneraren själv anser det vara korrekt.

Ett ytterligare alternativt på hur resonemang kan definieras har lagts fram av Toulmin, Rieke & Janik (1979). I det fallet ses resonemang som en del i en argumentation där dess roll är att framföra det som argumentet bygger på och därigenom berättiga det (Nordin, 2016). Resonemang ses alltså enligt denna syn som en byggsten i ett logiskt argument.

Eftersom denna studie genomförs inom gymnasieskolan anses det vara lämpligt att använda den syn på resonemangsförmåga som förespråkas av Skolverket (u.å). Det framgår inte tydligt i Skolverkets formulering att de motsätter sig tillåtandet av matematiskt inkorrekt resonemang, därför kommer även Lithners definition av resonemang att tillämpas och därmed betraktas även de matematiskt inkorrekta resonemangen som matematiska resonemang. På grund av att den syn som Toulmin et al. (1979) har på resonemang är förankrat i det strikt logiska argumentet anser jag att det inte är passande för ändamålet i denna studie att inkludera deras definition. Dels då den inte helt sammanfaller med Skolverkets syn på resonemangsförmågan och dels då det är en mindre del och inte nödvändigtvis tillåter resonemang att representera omfattande tankegångar.

2.1.1 Tre ramverk för matematiska resonemang

När synen på matematiska resonemang för den här studien nu är utredd är det dags att se till vilka möjliga kategoriseringar av matematiska resonemang som finns.

Induktivt och deduktivt

Skolverket använder sig av indelningen mellan induktivt och deduktivt resonemang (Hansson, 2014). Med induktivt resonemang menas tankegångar som leder till att generella samband formuleras utifrån studie av specifika fall. Det betyder inte att man nödvändigtvis

har bevisat sambandet, det räcker med att man formulerat det man anser vara det allmänna sambandet efter att ha studerat några enskilda fall (Hansson, 2014).

Det deduktiva resonemanget åsyftar istället tankegångar som leder till att specifika fall hanteras genom kännedom om de generella sambanden (Hansson, 2014). Det kan alltså röra sig om att individen använder sig av matematiska satser för att lösa ett specifikt fall eller bara tillämpa regler för ekvationslösning (Hansson, 2014).

Imitativt och kreativt

Ett annat sätt att kategorisera matematiska resonemang har lagts fram av Lithner (2008). Denna kategorisering delar upp matematiska resonemang i imitativa resonemang och kreativa resonemang.

Imitativa resonemang innebär att individen kopierar resonemang som den stött på tidigare eller tillämpar för individen kända algoritmer vid lösning av uppgifter (Lithner, 2008). Individen bidrar alltså inte med någonting nytt utan förlitar sig till att de resonemang som använts tidigare kommer att leda till en korrekt lösning (Lithner, 2008; Lithner, 2017).

Kreativa resonemang innebär något förenklat att individen använder sig utav ett tankesätt som är nytt för denne för att lösa en uppgift (Lithner, 2008). Utifrån detta ställer Lithner (2008) upp tre krav som alla måste uppfyllas för att resonemanget skall ses som kreativt.

1. *Novelty. A new (to the reasoner) reasoning sequence is created, or a forgotten one is re-created.*
2. *Plausibility. There are arguments supporting the strategy choice and/or strategy implementation motivating why the conclusions are true or plausible.*
3. *Mathematical foundation. The arguments are anchored in intrinsic mathematical properties of the components involved in the reasoning.*

(Lithner, 2008, s. 266).

Nedan följer min svenska tolkning av dessa tre krav.

1. Nyhet. Resonemanget är för resoneraren nytt.
2. Rimlighet. Det finns förutsäggande argument för varför resonemanget fungerar.
3. Matematisk grund. Resonemanget är förankrat i inneboende matematiska egenskaper som delarna som behandlas i resonemanget besitter.

Nyhetskravet innebär här att individen inte har tillgång till en lösningsmetod som kan tillämpas (Lithner, 2017). Rimlighetskravet innebär att individen inte bara gissar sig till en lösning utan baserar sin strategi på explicita eller implicita argument för varför strategin kommer att fungera (Lithner, 2017). Kravet för matematisk grund innebär att individen utgår

från egenskaper som de matematiska uttryck som resonemanget behandlar innehar, som till exempel att grafens lutning i en punkt är det samma som grafens derivata (Lithner, 2008).

De två kategorierna imitativt och kreativt behandlas till viss del som komplement till varandra, så om ett resonemang inte är kreativt är det imitativt (Lithner, 2017). Med detta i åtanke kan det därför räcka med att se till kraven för kreativa resonemang för att utifrån dessa avgöra om ett resonemang är kreativt eller imitativt. Detta trots att det finns liknande krav eller beskrivningar på vad som kategoriseras som imitativa resonemang (Lithner, 2008).

Komplexitet

En tredje kategorisering av resonemang har föreslagits av Kjellström & Stålné (2011) i bedömningssyfte. Denna kategorisering baseras på modellen om hierarkisk komplexitet (model of hierarchical complexity, MOHC) (Commons, 2008) och delar in resonemang i konkreta, abstrakta, formella, systematiska och metasystematiska resonemang. Tanken är här att det sker en progression i komplexitet från konkreta resonemang till metasystematiska resonemang och att det på så vis är möjligt att bedöma individers förståelse för ett ämne baserat på vilka typer av resonemang de använder sig utav (Kjellström & Stålné, 2011). Konkreta resonemang kännetecknas av att individen endast har specifika fall i åtanke och visar inga tecken på att generalisera sitt resonemang för att inbegripa andra situationer (Kjellström & Stålné, 2011). Abstrakta resonemang kännetecknas av att individen nu kan arbeta med en generell variabel i sin tankegång (Kjellström & Stålné, 2011). Formella resonemang kännetecknas av att individen kan binda samman två generella variabler och visa på hur den ena påverkar den andra (Kjellström & Stålné, 2011). Systematiskt resonemang kännetecknas av att individen nu behandlar flera oberoende variabler i sin tankegång och konstruerar ett system av dessa (Kjellström & Stålné, 2011). Metasystematiska resonemang kännetecknas av att individen kan jämföra olika system och studera dem utifrån (Kjellström & Stålné, 2011).

Sammanfattning av ramverkens kategorier

De tre presenterade ramverkens kategorier sammanfattas översiktligt nedan i tabell 1.

Tabell 1. Sammanfattning av kategorier baserat på Skolverket (2014), Lithner (2008, 2017) samt Kjellström & Stålné (2011).

RAMVERK	KATEGORI	KRAV
INDUKTIVT/DEDUKTIVT	Induktivt	<i>I sitt resonemang formulerar individen, utifrån några enskilda fall, generella regler och/eller samband.</i>

Tabell 1. - Fortsättning på tabell från föregående sida

RAMVERK	KATEGORI	KRAV
INDUKTIVT/DEDUKTIVT	Deduktivt	<i>I sitt resonemang tillämpar individen kända matematiska regler och samband i specifika situationer.</i>
IMITATIVT/KREATIVT	Imitativt	<i>Resonemanget brister i uppfyllandet av något eller några av följande krav; nyhetskravet, rimlighetskravet eller kravet på matematisk grund</i>
IMITATIVT/KREATIVT	Kreativt	<i>Resonemanget uppfyller alla tre kraven för kreativt resonemang; nyhetskravet, rimlighetskravet samt kravet på matematisk grund.</i>
MOHC	Konkret	<i>Individens resonemang begränsas till att endast hantera ett specifikt fall utan att några försök till generalisering genomförs.</i>
MOHC	Abstrakt	<i>Individen gör en generalisering och hanterar en variabel i sitt resonemang men gör inga kopplingar till andra variabler.</i>
MOHC	Formellt	<i>Individens sammankopplar i sitt resonemang två variabler och behandlar beroendet emellan dessa.</i>
MOHC	Systematiskt	<i>Individen hanterar i sitt resonemang flera oberoende variabler och berör hur dessa samspelar för att avgöra en beroende variabel.</i>

Tabell 1. - Fortsättning på tabell från föregående sida

RAMVERK	KATEGORI	KRAV
MOHC	Metasystematiskt	<i>Individens resonemang går utanför det givna systemet och behandlar alternativa system och jämför dessa med det ursprungliga.</i>

2.1.2 Kombination av ramverken

Tre olika ramverk för kategorisering av matematiska resonemang har nu presenterats och det kan vara relevant att utreda om de är kompatibla med varandra eller om det uppstår konflikter när de försöks tillämpas samtidigt. Om ramverken kan tillämpas samtidigt eller kombineras skulle det kunna ge en mer nyanserad bild av varje matematiskt resonemang. Till exempel beskrivs inte resonemangets innehåll om det endast benämns som imitativt. Om det istället benämns som deduktivt imitativt formellt går det utifrån den benämning att urskilja vissa karaktärsdrag hos resonemanget, i detta fall att det handlar om att tillämpa matematiska regler, innefatta samspelet mellan två variabler samt att det inte uppfyller samtliga av de tre kraven som ställts för att vara ett kreativt resonemang.

Här nedan följer en redogörelse för att de är möjligt att kombinera de tre ramverken induktivt/deduktivt, imitativt/kreativt och MOHC. Ramverken behandlas först parvis för att sedan visa att kombinationen av alla tre är möjlig.

2.1.2.1 Kombination av induktivt/deduktivt och imitativt/kreativt

Kategorierna imitativt och kreativt skiljer sig från de tidigare nämnda kategorierna induktivt och deduktivt såtillvida att det är möjligt för ett resonemang att tillhöra en kategori från vardera ramverk samtidigt. Alltså kan ett resonemang vara induktivt imitativt, induktivt kreativt, deduktivt imitativt eller deduktivt kreativt. Att detta är möjligt kan illustreras med två exempel.

Exempel 1: En individ formulerar för första gången sambandet att summan av två udda tal är jämn efter att ha studerat fallen $3 + 5 = 8$, $7 + 11 = 18$ och $35 + 67 = 102$.

Detta är nytt för individen, det är förankrat i de inneboende egenskaperna att de enskilda fallen som studerats är korrekt beräknade och det finns argument för att det är någorlunda rimligt att göra en generalisering efter att ha studerat ett antal enskilda fall, resonemanget uppfyller därmed kraven för att vara kreativt (Lithner, 2008). Vidare uppfyller resonemanget

även kravet för att vara induktivt, ett samband formuleras efter att enskilda fall studerats (Hansson, 2014). Därmed är resonemanget kreativt och induktivt.

Exempel 2: En individ bevisar för första gången att produkten mellan två udda tal alltid är udda, genom en uppställning med två allmänna udda tal.

Återigen uppfylls kravet på att resonemanget är nytt för individen, det finns en förankring i inneboende egenskaper för udda tal och det finns argument för varför en sådan uppställning är rimlig, alltså är det frågan om ett kreativt resonemang (Lithner, 2008). Vidare så tillämpas vetenskapen om hur ett allmänt udda tal gestaltas och hur två allmänna tal multipliceras och därmed uppfylls kravet för att resonemanget skall vara deduktivt (Hansson, 2014). Alltså är detta ett exempel på ett deduktivt och kreativt resonemang.

För att bevisa att det sedan är möjligt med motsvarande kombinationer fast med imitativt resonemang istället för kreativt resonemang så behöver det bara ske en förändring. Det är nu inte första gången som dessa resonemang förs av individen utan individen återskapar dem ur minnet. Detta gör att nyhetskravet inte uppfylls och därmed är resonemangen imitativa nu istället för kreativa (Lithner, 2008). Resonemangen uppfyller dock fortfarande kraven för att vara induktivt respektive deduktivt eftersom ingen förändring i formuleringen gjorts (Hansson, 2014). Med detta har det bevisats att även kombinationerna induktivt imitativt och deduktivt imitativt är möjliga och då kan slutsatsen dras att de två ramverken behandlar olika dimensioner av resonemang. Dessa två ramverk kan därmed användas samtidigt och kombineras utan att konflikter uppstår.

2.1.2.2 *Kombination induktivt/deduktivt och MOHC*

Induktivt och konkret

Kraven för att ett resonemang ska vara konkret respektive induktivt är motstridiga. I kravet för den första kategorin skall resoneraren inte göra några generaliseringar (Kjellström & Stålné, 2011) medan det för den andra kategorin är ett avgörande krav (Hansson, 2014). Därmed går det att dra slutsatsen att konkreta resonemang inte kan vara induktiva. Detta leder dock inte till en konflikt mellan ramverken utan innebär endast att denna kombination av kategorier inte existerar i praktiken.

Deduktivt och konkret

För att visa att det är möjligt för ett konkret resonemang att vara deduktivt används exemplet med att en individ resonera sig till vad lösningen av $4 * (2 + 3)$ blir. För att genomföra den här beräkningen korrekt behöver individen ha kännedom och använda sig av räknelagar och därmed ses resonemanget som deduktivt (Hansson, 2014), det finns dock inget behov av att hantera en variabel och därmed kategoriseras resonemanget som konkret (Kjellström & Stålné, 2011). Alltså är resonemanget deduktivt och konkret.

Induktivt/deduktivt och abstrakt

För att visa att kombinationen induktivt abstrakt resonemang är möjlig kan exemplet med en individ som efter att ha studerat 2^2 , 5^2 och $(-2)^2$ formulerar sambandet att ett tal i kvadrat alltid är positivt användas. Resonemanget uppfyller kravet för att vara induktivt då individen formulerar ett generellt samband utifrån specifika fall (Hansson, 2014). Eftersom resonemanget nu även behandlar en variabel i form av ett generellt tal så uppfyller det kravet för att vara abstrakt (Kjellström & Stålné, 2011). Resonemanget är därmed induktivt abstrakt. Ett liknande fall kan användas för att visa att kombinationen av deduktivt och abstrakt resonemang är möjligt. Individen får nu i uppgift att avgöra om $a^2 + 4 > 0$. För att lösa detta använder sig individen av vetenskapen att ett tal i kvadrat alltid är positivt och att summan av två positiva tal alltid är positiv och därmed stämmer olikheten. Resonemanget uppfyller kravet för att vara deduktivt eftersom individen använder sig av ett känt samband (Hansson, 2014). Eftersom resonemanget även behandlar en variabel så uppfyller det även kravet för att vara abstrakt (Kjellström & Stålné, 2011). Därmed är resonemanget deduktivt abstrakt.

Induktivt/deduktivt och formellt

För att visa att kombinationen av induktivt och formellt är möjligt kan exemplet med en individ som efter att ha studerat graferna $y = x + 4$, $y = x - 2$ och $y = x + 7$ formulerar slutsatsen att konstanten anger var grafen skär y-axeln användas. Detta resonemang uppfyller kravet för att vara induktivt då individen formulerar ett generellt samband efter att studerat några specifika fall (Hansson, 2014). Vidare behandlas två variabler, konstantens värde och grafens skärningspunkt med y-axeln, och därmed uppfyller resonemanget även kravet för att vara formellt (Kjellström & Stålné, 2011). Det är alltså ett induktivt formellt resonemang. För ett exempel på att deduktivt formellt resonemang är möjligt finns scenariot när en individ skall bestämma värdet på a i $y = x + a$. Till sin hjälp har individen grafen för y . Individen tillämpar då vetenskapen om att värdet på a avgör skärningspunkten mellan grafen och y-axeln och läser därefter av värdet för a ur grafen. Detta resonemang uppfyller kravet för att vara deduktivt då vetenskapen om ett generellt samband tillämpas (Hansson, 2014). Precis som föregående exempel hanteras även två variabler och sambandet dem emellan vilket gör att resonemanget även uppfyller kravet för att vara formellt (Kjellström & Stålné, 2011). Detta är alltså ett exempel på ett deduktivt formellt resonemang.

Induktivt/deduktivt och systematiskt

När det skall visas att kombinationen av induktivt och systematiskt resonemang är möjligt går det att återgå till exemplet med individen som formulerade att summan av två udda tal är jämn. Förutsatt att individen varierat på båda två av de udda talen så uppfyller resonemanget kravet för att vara systematiskt då två oberoende variabler, de två udda talen, påverkar en tredje variabel, summan av de två talen (Kjellström & Stålné, 2011). Resonemanget uppfyller

som bekant även kravet för att vara induktivt (Hansson, 2014) och det är därmed ett exempel på att kombinationen av induktivt och systematiskt resonemang är möjlig. För att visa att kombinationen av deduktivt och systematiskt resonemang är möjligt används exemplet där en individ fått till uppgift att skissa grafen till $y = \sin(x + 30) + 4$. I sitt resonemang tillämpar individen vetenskapen att i grafen för $y = \sin(x + a) + b$ så avgör värdet på a hur långt till vänster grafen förskjutits i förhållande till grafen för $y = \sin(x)$ och värdet på b avgör hur långt uppåt grafen förskjutits från grafen till $y = \sin(x)$. Resonemanget uppfyller då kravet för att vara deduktivt eftersom vetenskapen om ett generellt samband tillämpas (Hansson, 2014). Även kravet för att vara systematiskt uppfylls av resonemanget då a och b här är oberoende variabler som påverkar en tredje, kurvans utseende (Kjellström & Stålné, 2011). Detta resonemang är alltså ett exempel på att kombinationen av deduktivt och systematiskt är möjligt.

Induktivt/deduktivt och metasystematiskt

Slutligen, för att visa på att kombinationen mellan induktivt/deduktivt och metasystematiskt resonemang är möjligt används exempel med komplexa tal i rektangulär form och polär form. I det första exemplet har en individ genomfört addition och multiplikation av talen $z_1 = 3 + 4i$ och $z_2 = 1 + \sqrt{8}i$ först i rektangulär form och sedan i polär form. Individen formulerar efter det slutsatsen att om två komplexa tal skall adderas så görs det enklast i rektangulär form och om två komplexa tal ska multipliceras så görs det enklast i polär form. Resonemanget uppfyller kravet för att vara induktivt (Hansson, 2014) och eftersom det två olika representationerna för komplexa tal kan ses som separata system så uppfyller resonemanget även kravet för att vara metasystematiskt (Kjellström & Stålné, 2011). Detta resonemang är alltså ett exempel på att det går att kombinera induktivt och metasystematiskt resonemang. För att sedan visa att kombinationen deduktivt metasystematiskt är möjligt används exemplet när en individ fått i uppgift att beräkna;

$$(2 + 3i) * ((1 - i) + (1 + 3i)) + (6 - 8i) =$$

Individen resonerar nu att det är bäst att börja med att beräkna summan i parenteserna i rektangulär form för att sedan övergå till polär form för att värdera produkten och sedan återgå till rektangulär form för att genomföra den andra additionen. Här tillämpar individen sina matematiska kunskaper och resonemanget uppfyller därmed kravet för att vara deduktivt (Hansson, 2014) och eftersom två olika representationer, system, behandlas i resonemanget så uppfyller det även kravet för att vara metasystematiskt (Kjellström & Stålné, 2011). Detta är alltså ett exempel på att kombinationen av deduktivt och metasystematiskt resonemang är möjligt.

2.1.2.3 Kombination av de tre ramverken

För att visa att det är möjligt att kombinera samtliga tre ramverk behövs det nu bara visas att det är möjligt att kombinera kategorierna imitativt och kreativt med kategorikombinationerna mellan induktivt/deduktivt och MOHC som precis presenterats. För att göra detta tillämpas samma strategi som när det visades att kombinationen mellan induktivt/deduktivt och imitativt/kreativt var möjlig. Därmed visas först att kombinationen mellan kreativa resonemang och de tidigare beskrivna kombinationerna mellan induktivt/deduktivt och MOHC är möjligt. Notera att samtliga exempel från kombinationen av induktivt/deduktivt och MOHC uppfyller kraven att vara matematiskt förankrat och även kravet att vara rimligt (Lithner, 2008). Det enda som sedan krävs för att resonemangen ska kategoriseras som kreativa är att det är nya för individen, något som för detta ändamål kan antas vara sant och därmed uppfyller varje tidigare beskrivet resonemang kraven för att vara kreativa (Lithner, 2008). Det har därmed visats att det är möjligt att kombinera varje tidigare kombination av induktivt/deduktivt och MOHC med kategorin kreativt resonemang. För att visa att varje tidigare kombination av induktivt/deduktivt och MOHC även är möjlig att kombinera med imitativt resonemang behöver endast de tidigare givna exemplen ändras så att det inte är ett för individen nytt resonemang som används. Detta gör att resonemangen som beskrivits inte uppfyller kraven för att vara kreativa resonemang och därmed ses som imitativa (Lithner, 2008). Därmed har det visats att det är möjligt att kombinera samtliga tidigare nämnda kombinationer mellan induktivt/deduktivt och MOHC med kategorin imitativa resonemang. Med detta har det slutligen visat att det är möjligt att kombinera samtliga tre ramverk för matematiska resonemang med varandra och genom det generera 20 nya kategorier, varav 18 är teoretiskt möjliga och två bedömts som teoretiskt omöjliga. Dessa kombinerade kategorier sammanfattas i tabell 2.

Tabell 2. Tabell över samtliga 20 kombinationskategorier för matematiskt resonemang. Koden består av en bokstav som anger om resonemanget är induktivt (A) eller deduktivt (B), en siffra i mitten som anger om resonemanget är imitativt (1) eller kreativt (2), samt en siffra på slutet som anger om resonemanget är konkret (1), abstrakt (2), formellt (3), systematiskt (4) eller metasystematiskt (5).

Kategori	Kod	Uppfyller krav för att vara:
Induktivt imitativt konkret*	A11	• Induktivt • Imitativt • Konkret
Induktivt imitativt abstrakt	A12	• Induktivt • Imitativt • Abstrakt

*Bedömts som teoretiskt omöjliga

Tabell 2. – Fortsättning på tabell från föregående sida

Kategori	Kod	Uppfyller krav för att vara:
Induktivt imitativt formellt	A13	• Induktivt • Imitativt • Formellt
Induktivt imitativt systematiskt	A14	• Induktivt • Imitativt • Systematiskt
Induktivt imitativt metasystematiskt	A15	• Induktivt • Imitativt • Metasystematiskt
Induktivt kreativt konkret*	A21	• Induktivt • Kreativt • Konkret
Induktivt kreativt abstrakt	A22	• Induktivt • Kreativt • Abstrakt
Induktivt kreativt formellt	A23	• Induktivt • Kreativt • Formellt
Induktivt kreativt systematiskt	A24	• Induktivt • Kreativt • Systematiskt
Induktivt kreativt metasystematiskt	A25	• Induktivt • Kreativt • Metasystematiskt
Deduktivt imitativt konkret	B11	• Deduktivt • Imitativt • Konkret
Deduktivt imitativt abstrakt	B12	• Deduktivt • Imitativt • Abstrakt
Deduktivt imitativt formellt	B13	• Deduktivt • Imitativt • Formellt

*Bedömts som teoretiskt omöjliga

Tabell 2. – Fortsättning på tabell från föregående sida

Kategori	Kod	Uppfyller krav för att vara:
Deduktivt imitativt systematiskt	B14	• Deduktivt • Imitativt • Systematiskt
Deduktivt imitativt metasystematiskt	B15	• Deduktivt • Imitativt • Metasystematiskt
Deduktivt kreativt konkret	B21	• Deduktivt • Kreativt • Konkret
Deduktivt kreativt abstrakt	B22	• Deduktivt • Kreativt • Abstrakt
Deduktivt kreativt formellt	B23	• Deduktivt • Kreativt • Formellt
Deduktivt kreativt systematiskt	B24	• Deduktivt • Kreativt • Systematiskt
Deduktivt kreativt metasystematiskt	B25	• Deduktivt • Kreativt • Metasystematiskt

*Bedömts som teoretiskt omöjliga

När det nu finns ett ramverk för hur det är möjligt att kategorisera matematiska resonemang presenteras det vidare vilket ramverk som ska tillämpas för att identifiera ingenjörsmässiga förmågor.

2.2 Ingenjörsmässighet

För att kunna besvara den andra frågeställningen behöver det avgöras vilka förmågor som kommer att identifieras som ingenjörsmässiga.

Historiskt sett har ingenjörnsrollen gått från att vara fokuserad på de praktiska och problemlösning genom beprövad kunskap till att förlita sig på generell kunskap från naturvetenskapen för att lösa problem i specifika situationer (Sundin, 2006). Det arbetssättet skulle kunna kategoriseras som deduktivt enligt Skolverkets (2014) synsätt och alla deduktiva resonemang skulle därmed kunna kategoriseras som ingenjörsmässiga. Jag är dock mer

intresserade av att identifiera möjliga aspekter som inte täckts av de ramverk för matematiska resonemang som kommer att användas.

I en studie intervjuade Anderson, Courter, McGlamery, Nathans-Kelly & Nicometo (2010) ingenjörer från olika företag om vad det innebar att vara ingenjör. Det som var återkommande var problemlösning, kommunikation, inläring och hantering av restriktioner. En ingenjör förväntas kunna lösa problem genom användning av den kunskap som finns tillgänglig. En ingenjör förväntas kunna kommunicera med andra arbetskamrater och även koordinera arbetet mellan olika delar av en organisation. En ingenjör förväntas kunna lära sig nya saker när det är behovligt, till exempel för att lösa ett problem där nuvarande kunskap inte är tillräcklig. Slutligen förväntas även en ingenjör hantera olika restriktioner, så som tidsplan och ekonomisk budget.

CDIO initiativet har skapat en lista, CDIOS syllabus, över de kunskaper, förmågor, färdigheter och egenskaper som de anser att en ingenjör ska besitta (CDIO, 2011b). Dessa är indelade i fyra huvudområden:

1. *Ämneskunskaper*
2. *Individuella och yrkesmässiga färdigheter och förhållningssätt*
3. *Förmåga att arbeta i grupp och att kommunicera*
4. *Planering, utveckling, realisering och drift av tekniska produkter och system med hänsyn till affärsmässiga och samhällseliga behov och krav – innovationsprocessen*
(Conceive Design Implement Operate, 2011a)

För varje huvudområde finns en lista över underområden som mer detaljerat beskriver vad som förväntas av en ingenjör (CDIO, 2011b).

Denna studie utgår ifrån listan som CDIO sammanställt som ramverk för ingenjörsmässighet. Detta eftersom många av områdena och underområdena berör samma aspekter som nämnts i de tidigare källorna för ingenjörsmässighet. Materialet är även lämpligt som bedömningsmall i den form det är formulerat vilket gör att det inte krävs några omformuleringar för att kunna tillämpa det.

Det krävs dock att några avgränsningar görs, eftersom materialet är omfattande och allt inte är direkt applicerbart i den här studien. Valet har därför gjorts att fokusera på de kriterier som berör tillämpning av problemlösning, hantering av begränsningar och fortsatt självutbildning. De utvalda kategorierna presenteras nedan i tabell 3.

Tabell 3. Följande tabell är baserad på CDIO syllabus (CDIO, 2011a). För en mer utförlig beskrivning av vilka krav som skall uppfyllas hänvisas läsaren till den engelska versionen (CDIO, 2011b). Koden som används motsvarar kategorins position i CDIO syllabus.

Kategori	Kod	Kortfattad kravbeskrivning
Problemidentifiering och -formulering	2.1.1.	För att kategoriseras som 2.1.1 så behövde elevens resonemang visa på att eleven identifierat ett problem att lösa och/eller gjort upp en plan för hur ett problem skall lösas.
Modellering	2.1.2.	För att kategoriseras som 2.1.2. behövde elevens resonemang visa på att denne vidtagit steg för att skapa en förenklad modell av problemet som gör att det är lättare att angripa.
Kvantitativa och kvalitativa uppskattningar	2.1.3.	För att kategoriseras som 2.1.3 behövde elevens resonemang visa på att denne gjort en uppskattning av storleksordningen eller trenden för ett uttryck.
Analys med hänsyn till osäkerheter och risker	2.1.4.	För att kategoriseras som 2.1.4 behövde elevens resonemang visa att denne gjort en analys även utan tillräcklig information eller gjort en analys av potentiella risker och fördelar.
Slutsatser och rekommendationer	2.1.5.	För att kategoriseras som 2.1.5. behövde elevens resonemang visa på att denne löst ett problem eller redogör för möjliga förbättringar i hur denne löste problemet.
Sökning i tryckt och elektronisk litteratur	2.2.2.	För att kategoriseras som 2.2.2. behövde elevens resonemang visa på att denne hade en strategi för att hitta nödvändig information.
Helhetstänkande	2.3.1.	För att kategoriseras som 2.3.1. behövde elevens resonemang visa på att eleven hanterade en situation med helhetsperspektiv.

Tabell 3. – Fortsättning på tabell från föregående sida

Kategori	Kod	Kortfattad kravbeskrivning
Interaktion och framträdande egenskaper hos system	2.3.2.	För att kategoriseras som 2.3.2 behövde elevens resonemang behandla interaktionen mellan spelare eller andra element i spelet.
Kompromisser och avvägningar i val av lösningar	2.3.4.	För att kategoriseras som 2.3.4 behövde elevens resonemang visa på en medvetenhet i begränsningarna i sin lösning.
Initiativförmåga och förmåga att fatta beslut under osäkerhet	2.4.1.	För att kategoriseras som 2.4.1. behövde elevens resonemang visa på initiativtagande eller beslutsfattande utifrån den tillgängliga informationen, även när den tillgängliga informationen inte var tillräcklig för att fatta helt korrekta beslut.
Uthållighet, ambition att leverera och anpassningsförmåga	2.4.2.	För denna kategori fanns det många krav som kan göra att resonemanget kategoriserades som 2.4.2. Till exempel kan det kategoriseras som 2.4.2. om eleven i resonemanget uttryckte ett ansvar för utfallet. Men även resonemang då eleven visat på självsäkerhet eller mod kan kategoriseras som 2.4.2.
Självkännedom och integration av kunskaper	2.4.5.	För att kategoriseras som 2.4.5. behövde resonemanget som eleven förde visa på en kännedom om dennes egna styrkor eller svagheter eller på vilket sätt denne tänker.
Livslångt lärande och utbildning	2.4.6.	För att kategoriseras som 2.4.6. behövde resonemanget visa på att eleven var förmögen till självinläring eller att hjälpa andra att lära sig.
Planering av tid och resurser	2.4.7.	För att kategoriseras som 2.4.7. behövde elevens resonemang visa på att denne gjort en prioritering över de uppgifter som ska göras eller identifierat hur viktiga olika uppgifter är att göra.

Tabell 3. – Fortsättning på tabell från föregående sida

Kategori	Kod	Kortfattad kravbeskrivning
Förtroende och lojalitet	2.5.6.	För att kategoriseras som 2.5.6. behövde elevens resonemang lyfta fram andra elevers bidrag till lösningen.

2.3 Förväntningar för relevans inom undervisning

För att kunna besvara den tredje frågeställningen behövs krav på vad som gör en arbetsmetod relevant för undervisning ställas upp. Utifrån de presenterade ramverken för resonemang och ingenjörsmässiga förmågor formuleras här de förväntningar som finns för vad en arbetsmetod ska uppfylla för att ses som relevant för användning inom undervisning.

Förväntningar enligt ramverk induktivt/deduktivt

Skolverket (u.å.) förväntar sig att matematiska resonemang förekommer för att arbetssättet skall ses som relevant. Detta innebär vidare att både induktiva och deduktiva resonemang bör förekomma när arbetsmetoden tillämpas (Hansson, 2014).

Förväntningar enligt ramverk imitativt/kreativt

Utifrån Lithners (2017) syn på resonemang förefaller det som att en betydande andel av de resonemang som används när en arbetsmetod tillämpas ska vara kreativa för att arbetsmetoden skall ses som relevant för användning inom undervisning. Baserat på resultatet från studien av Jäder (2015) kommer förväntningen vara att minst en tiondel av alla resonemang är kreativa.

Förväntningar enligt ramverk MOHC

Eftersom det ramverk som presenteras av Kjellström & Stålne (2011) utgår från en tillämpning inom bedömning kan det ses som en förväntning att en arbetsmetod ska ge förutsättningar för samtliga former av resonemang att förekomma för att ses som relevant för användning inom undervisning.

Förväntningar enligt ramverk kombinerat ramverk för resonemang

De förväntningar som sätts utifrån kombinationen av de tre presenterade ramverken för resonemang är att så många som möjligt av de kombinerade kategorierna av resonemang ska förekomma för att arbetsmetoden skall ses som relevant för användning inom undervisning. Detta eftersom det kan ses som en indikation på att många olika aspekter av resonemang behandlas och det ses som positivt för undervisningen.

Förväntningar enligt ramverk ingenjörsmässiga förmågor

Utifrån det ramverk för ingenjörsmässiga förmågor som utgått ifrån CDIO syllabus (2011a) ses det som förväntat att minst en av de listade förmågorna skall förekomma när arbetsmetoden används för att arbetsmetoden skall ses som relevant inom undervisning. Det ses även som något positivt om ett flertal av förmågorna som listats förekommer då det ses som en indikation på att en större representation av ingenjörsmässighet har behandlats i undervisningen.

3 Metod

För att genomföra en undersökning som ska besvara de tre frågeställningarna och uppfylla syftet med den här studien behövde jag bestämma vilken övergripande angreppssätt jag skulle ha, hur och vilken data som skulle samlas in och hur data skulle bearbetas och analyseras.

Det här kapitlet påbörjas med en redogörelse för teorin för de metoder som tillämpas i denna studie. Detta följs sedan av en redogörelse för hur datainsamlingen och databearbetningen genomförts i praktiken. Kapitlet avslutas med att ta upp etiska överväganden och avgränsningar för studien.

3.1 Beskrivning av metoder

3.1.1 Fallstudie

I denna studie har valet gjorts att använda en fallstudie då bedömningen gjordes att spelet ännu var i prototypfasen av utvecklingen. Det ansågs därmed bäst lämpat att börja med en studie i mindre skala med fokus på att få in kvalitativa data. En fallstudie innebär att studien undersöker ett eller ett fåtal fall av ett intressant fenomen (Denscombe, 2010). Målet är att analysera fallet mer djupgående och med ett helhetsperspektiv som inte alltid är möjligt om studien skulle breddas för att innefatta flera fall (Denscombe, 2010).

Vad som kan kvalificeras som ett fall är brett och därför börjar en fallstudie med att identifiera gränserna för fallet som ska studeras (Denscombe, 2010). Ett fall bör dock vara naturligt förekommande och ska därmed inte kräva att forskarna skapar en artificiell situation, gränserna för fallet bör också vara naturligt förekommande (Denscombe, 2010).

Att fallet är naturligt förekommande gör även att fallstudier kan ha en mindre påverkan på det som observeras än exempelvis enkätstudier, där observatören skapar en artificiell situation och dessutom riskerar att påverka deltagarnas tänkande och agerande genom de frågor som ställs (Denscombe, 2010).

3.1.2 Deltagarobservation

Eftersom jag var den enda som ansågs besitta tillräckligt gedigna kunskaper om spelets design och regler för att kunna besvara eventuella regelfrågor som eleverna kunde ha under spelets gång, fanns det ett behov av att jag deltog under speltillfällena. Detta fick till följd att deltagarobservation var en metod som var lämplig att tillämpa. En deltagarobservation kännetecknas av att observatören är en deltagare i det som observeras (Denscombe, 2010). Detta innebär att observatören tillåts interagera med de andra deltagarna och behöver inte hålla en passiv observatörsroll (Bjørndal & Nilsson, 2005; Denscombe, 2010). Beroende på hur omständigheterna ser ut kan det röra sig om olika former av deltagarobservation. En distinktion som görs mellan olika typer av deltagarobservation är i hur stor omfattning de andra deltagarna vet om observatörens roll. Det kan röra sig om att ingen annan deltagare vet om att observatören är observatör, eller så kan några få deltagare vara medvetna om observatörens dubbelroll (Denscombe, 2010). Det är även möjligt att samtliga deltagare är medvetna om att observatören även har rollen som observatör. Utav de nämnda varianterna är det den sistnämnda som anses mest etiskt försvarbar då man i de andra inte informerar alla deltagare om att de blir observerade (Vetenskapsrådet, 2017; Denscombe, 2010). Deltagarobservation är oftast det enda tillgängliga alternativet när observatören behöver fylla en aktiv roll i det moment som skall observeras (Bjørndal & Nilsson, 2005).

3.1.3 Transkribering

Vid transkribering skall materialet återges i textformat så identiskt till det ursprungliga materialet som möjligt men det betyder inte att texten blir helt likvärdig det ursprungliga formatet (Bjørndal & Nilsson, 2005). Detta gör att regler för hur sådant som pauser, skratt, tonlägen, avbrytningar m.m ska hanteras behöver klargöras innan transkriberingen genomförs (Bjørndal & Nilsson, 2005). Bjørndal & Nilsson (2005) lyfter även fram att det går att transkribera endast intressanta delar av inspelningar för att minska den tid som transkriberingen tar i anspråk, men poängterar även att detta kan göra det svårt att upptäcka mönster som endast framkommer om hela materialet transkriberas. Även Denscombe (2010) påpekar att det är möjligt att vara selektiv i vad av materialet som transkriberas om bedömningen görs att detta urval inte kommer att leda till att viktiga data försvinner.

3.1.4 Innehållsanalys

Kvalitativ innehållsanalys beskrivs av Mayring (2015) som en blandning av en kvalitativ metod och en kvantitativ metod. Detta kommer av att kvalitativ innehållsanalys använder sig av kvalitativa data som intervjuer eller längre skrivna texter för att sedan bryta ner dem i mindre delar, textenheter, som sedan kategoriseras och då ger upphov till ett kvantitativt underlag (Hsieh & Shannon 2005). Vidare beskriver Mayring (2015) kvalitativ

innehållsanalys som ett verktyg som ständigt måste anpassas till den studie i vilken den tillämpas, något som gör att det finns flera olika versioner av kvalitativ innehållsanalys.

Den första indelningen av olika typer av innehållsanalys som görs är mellan manifest och latent innehållsanalys. Manifest innehållsanalys åsyftar en innehållsanalys som fokuserar på det som står att läsa direkt i textmaterialet (Potter & Levine-Donnerstein, 1999). Latent innehållsanalys åsyftar istället den innehållsanalys där det som studeras är de underliggande innebörderna som inte står att läsa direkt i texten utan snarare mellan raderna (Potter & Levine-Donnerstein, 1999).

Utöver indelning i manifest eller latent innehållsanalys så finns indelningen i induktiv eller strukturerad innehållsanalys (Marying, 2015). Strukturerad innehållsanalys, som benämns av Hsieh & Shannon (2005) som riktad innehållsanalys, kännetecknas av att man utgår ifrån ett på förhand bestämt ramverk för de olika kategorier som texten kommer att fördelas mellan. Detta skiljer sig från den av Marying (2015) kallad induktiv innehållsanalys, av Hsieh & Shannon (2005) benämnda konventionella innehållsanalysen, där kategorierna skapas utifrån den data som studeras. I induktiv innehållsanalys konstrueras alltså kategorierna utifrån texten som analyseras medan en strukturerad innehållsanalys använder sig av på förhand bestämda kategorier vid kategoriseringen av texten.

3.2 Studiens genomförande

3.2.1 Datainsamling

I den här studien studerades två elevgrupper som spelade spelet XYZ vid tre speltillfällen var och det är det som kommer att utgöra fallet i den här studien (Denscombe, 2010).

Inför det första speltillfället skickades reglerna och presentationen till eleverna så att de om de ville skulle kunna förbereda sig inför första speltillfället. Det första speltillfället för varje grupp inleddes med en genomgång av reglerna för spelet för att säkerställa att alla elever informerats om dessa.

Vid varje speltillfälle spelade eleverna spelet i par eller grupper om tre i ungefär en timme. Efter att eleverna spelat spelet valde de ut ett spelparti de ville visa upp för resten av gruppen. Under ett efterföljande presentationstillfälle turades eleverna sedan om att visa upp det parti de valt och återgav hur de resonerat när de gjorde sina val under spelomgången. Viktigt att notera är att detta presentationstillfälle är en del av speltillfället och skulle därmed ha genomförts även om speltillfället inte var en del av en vetenskaplig studie. Beslutet att genomföra tre speltillfällen med varje grupp baserades på erfarenheten från studien som genomförts av Barclay et al (2011), där det framkommit att tre speltillfällen var behövligt för att alla deltagare skulle lära sig spelreglerna ordentligt. Valet att dela upp varje speltillfälle i ett moment då spelet spelades och ett moment då spelet analyserades gjordes för att ge ett

verklighetstroget upplägg för hur ett speltillfälle skulle se ut även utanför denna studie, något som är ett krav för fallstudier (Denscome, 2010). Genom uppdelningen gavs ett tillfälle där det var naturligt för eleverna att redogöra för hur de resonerat, något som inte skulle vara lika naturligt om de tvingats redogöra för hur de resonerade i realtid under spelets gång.

Som nämnts tidigare fanns det ett behov av att ha med mig som deltagare under speltillfällena och detta medförde att deltagarobservation ansågs vara den metod som var genomförbar (Bjørndal & Nilsson, 2005). Mitt deltagande var dock begränsat till rollen som regelspecialist och sedan samtalsledare under presentationstillfället. Det tydliggjordes att jag även hade en roll som undersökare så det rör sig om en deltagarobservation där min roll som undersökare var känd för samtliga deltagare (Denscombe, 2010). Tanken var dock att mitt deltagande skulle ha så liten påverkan som möjligt på elevernas sätt att genomföra speltillfället. Därmed var det endast när eleverna själva hade frågor om spelets regler som jag interagerade med dem under speltillfället. Jag sökte alltså inte aktivt upp elever som jag ansåg spelade spelet ”fel” för att tillrättavisa dem och jag var noga med att inte ge eleverna ledning i hur de kunde tänka när de spelar spelet. Även under presentationstillfället hade jag en väldigt passiv roll och lät eleverna själva avgöra vad de vill berätta och hur mycket de ville berätta. Allt detta gjordes för att säkerställa att det mesta genomfördes på det sätt som föreföll naturligt för eleverna.

Att jag var närvarande under speltillfället gav mig även möjlighet att få en uppfattning om hur eleverna spelade och tänkte på ett sätt som bedömdes skulle vara svårt att uppnå med någon annan metod, så som enkätundersökning (Denscombe, 2010). Utav de 6 speltillfällena som ägde rum deltog jag under 4, vid de två övriga var det av praktiska skäl inte möjligt för mig att delta.

Under presentationstillfället av speltillfället genomfördes inspelning i form av antingen ljudinspelning eller videoinspelning och ljudinspelning. Beslutet att endast spela in eleverna under presentationstillfället gjordes för att ge eleverna möjlighet att spela spelet mer avspänt, då de inte behövde oroa sig över att bli inspelade just då. Resonemangen som eleverna framförde under presentationstillfället bedömdes även att vara tillräckligt trogna de resonemang som eleverna förde under själva spelandet för att användas som dataunderlag.

3.2.2 Bearbetning av data

I denna studie fattades beslutet att endast återge i transkriberingen det som eleverna sade, samt markera med ”-” om det var så att ett ord eller en mening avbröts. Detta beslut gjordes på grunderna att det var elevernas resonemang som var det viktigaste att få med, och andra mer indirekta former av kommunikation så som tonläge, skratt, minspel och liknande inte ansågs vara avgörande för vidare analys av resonemangen (Denscome, 2010; Bjørndal & Nilsson, 2005). För att även dra ner på mängden material som behövde transkriberas så

utelämnades alla tillfällen då eleverna inte gjorde något annat än att återge hur spelomgången gått till (Bjørndal & Nilsson, 2005). Detta material ansåg inte ha någon betydelse för vidare analys av resonemang och inget av det materialet ansågs heller kunna kategoriseras som resonemang, varken matematiskt eller icke-matematiskt, och därför utelämnades det (Denscome, 2010).

I studien tillämpades i första hand en manifest strukturerad innehållsanalys vid arbetet med den genererade data från inspelningarna. Detta innebär att kategorier valdes på förhand, baserade på de teoretiska ramverken för resonemang som presenterats i kapitel 2 och fokuset låg vid det som gick att läsa direkt i texten (Marying, 2015; Potter & Levine-Donnerstein, 1999). Det skall dock sägas att det i vissa fall krävdes att jag som undersökare gjorde tolkningar där annan information än den som stod att läsa direkt ur texten fick vägas in vid kategoriseringen. Detta innebär att en latent form av innehållsanalys även tillämpades i studien (Potter & Levine-Donnerstein, 1999). Valet att genomföra en strukturerad innehållsanalys innebär att jag kommer att fokusera på sådant som passar in i de ramverk för kategorierna som jag valt. Detta får till följd att jag inte nödvändigtvis kommer att lägga märke till andra mönster som skiljer sig från de valda ramverken, vilket gör att min analys blir betydligt avgränsad.

Som textenhet valdes sammanhängande resonemang, alltså all text i följd som för ett resonemang utan avbrott. Detta gjordes för att inte riskera att bryta upp ett längre resonemang i mindre delar och då förlora vissa av resonemangets egenskaper. Det ledde dock till att textenheterna varierade i längd mellan allt från en mening till ett helt stycke, beroende på hur omfattande elevernas resonemang var.

För matematiska resonemang användes kategorier baserade på de tre tidigare nämnda ramverken *induktivt/deduktivt*, *imitativt/kreativt* och *MOHC*, som presenterades i kapitel 2. För resonemang som inte bedömts vara matematiska användes kategorierna från *MOHC*, då detta ramverk inte var begränsat till strikt matematiska resonemang (Kjellström & Stålné, 2011). Dessa resonemang bedömdes alltså endast utifrån huruvida de uppfyllde kraven för att kategoriseras som konkret, abstrakt, formellt, systematiskt eller metasystematiskt.

Kategorier för ingenjörsmässighet baserades på det urval från CDIO syllabus (CDIO, 2011a) som presenterades i kapitel 2.2. Eftersom ett resonemang bedömdes kunna vara kapabelt att uppvisa flera ingenjörsmässiga egenskaper tilläts under denna innehållsanalys att varje resonemang kodades som tillhörande flera kategorier.

Slutligen, efter att resultatet från innehållsanalysen sammanställts jämfördes det mot de förväntningar som formulerats i kapitel 2.3.

3.3 Urval

För urvalet av deltagare sattes två krav upp. Deltagarna skulle vara gymnasieelever och de skulle antingen läsa eller ha läst Matematik 4. Utifrån dessa krav genomfördes ett urval där de individer som uppfyllde kraven och var tillgängliga för undersökaren att träffa i person tillfrågades att delta i studien. Först tillfrågades de ansvariga lärarna om elevernas möjlighet att delta i studien och om möjlighet att träffa eleverna i person. Sedan tillfrågades eleverna under den första fysiska träffen innan det första speltillfället om de ville delta i studien. Totalt tillfrågades 16 elever om de ville delta i studien. 13 elever valde att delta från början, 2 elever valde sedan att avbryta sitt deltagande under studiens gång. Ytterligare 2 elever missade ett utav de tre speltillfällena.

Detta sätt att välja deltagare utifrån vilka som finns tillgängliga i undersökarens närhet betraktas som ett bekvämlighetsurval (Denscombe, 2010). Bekvämlighetsurval är något man bör undvika att använda i sin studie (Denscombe, 2010). I denna studie gjordes dock bedömningen att de deltagare som tillfrågades var likvärdiga alternativa deltagare i och med att de uppfyllde de två satta kraven för deltagare. Under dessa förhållanden ses det som godtagbart att genomföra ett bekvämlighetsurval för att spara på resurser (Denscombe, 2010).

3.4 Etiska överväganden

Åtgärder för att säkerställa etisk forskning

När det kommer till forskning som inbegriper människor på det sätt som denna studie gör finns det etiska principer att förhålla sig till.

Vetenskapsrådet har sammanfattat dessa i fyra huvudkrav; informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet (Vetenskapsrådet, 2002)

Informationskravet redogör för det som undersökningsdeltagarna skall vara informerade om, detta ska främst innefatta vad syftet med undersökningen är, eventuella risker för deltagarna samt att deras deltagande är frivilligt och att de när som helst kan besluta att avsluta sitt deltagande (Vetenskapsrådet, 2002). I den här studien avsattes ett besökstillfälle innan genomförandet av undersökning till att informera de potentiella deltagarna om studiens utformning och syfte samt vad deras deltagande skulle innebära. De potentiella deltagarna informerades även om att deras deltagande var helt frivilligt och att de kunde avbryta sitt deltagande när som helst. Det ansågs även vara viktigt att jag presenterade mig för de potentiella deltagarna så att de fick information om vem som skulle samla in och behandla data.

Samtyckeskravet förtydligar att forskaren behöver ha deltagarnas samtycke för att samla in data, i de fall då deltagarna är yngre än 15 år bör även samtycke inhämtas från vårdnadshavare

(Vetenskapsrådet, 2002). I den här studien deltog endast individer äldre än 15 år och det var därmed tillräckligt att få deltagarnas samtycke. I det fall då videoinspelning tillämpades var samtliga deltagare 18 år eller äldre och därmed var det tillräckligt att samla in deltagarnas samtycke till att bli inspelade. Samtycke inhämtades muntligt under den första träffen inför studien och sedan igen under det första speltillfället inför den första inspelningen. Dokumentation av samtycket genomfördes sedan utifrån det muntliga samtycket.

Konfidentialitetskravet redogör för att den information som samlas in i studien måste behandlas på ett sådant sätt att utomstående inte kan använda den för att identifiera undersökningsdeltagare (Vetenskapsrådet, 2002). Det material som främst berörs av detta krav i den här studien är de insamlade inspelningarna som gjorts av eleverna. Ljudinspelningarna har förvarats lösenordskyddade och endast lokalt på undersökarens hårddisk. Videoinspelningarna har endast delats mellan undersökaren och den lärare som ansvarat för inspelning i undersökarens frånvaro. Delningen skedde då på ett sätt som endast gjort det möjligt för behöriga att ta del av inspelningen. Vid transkriberingen har sedan allt material avpersonifierats och alla namn har ersatts med platshållare i form av Spelare 1, Spelare 2, Spelare 3 osv.

Nyttjandekravet fastställer att information som samlas in under en studie endast får användas till forskning och mer specifikt endast den forskning som deltagarna gett sitt samtycke till att deras information skall användas till (Vetenskapsrådet, 2002). Den information som samlats in under den här studien har använts och kommer endast att användas inom den här studien. Undersökaren har ej som avsikt att dela informationen med utomstående, varken kommersiella aktörer eller andra forskare.

Data som samlas in inom ramarna för denna studie är av känslig karaktär. Beslutet har därför fattats att förstöra data efter att examensarbetet, som denna studie är en del av, avslutats. Detta görs trots att arkivering av data är av vetenskaplig vikt för att göra det möjligt att granska data igen, om det skulle bli relevant. Anledningen till att beslutet ändå fattats att förstöra data är att data är av känslig karaktär som skall förstöras när de inte längre behövs för sitt primära ändamål (Datainspektionen, u.å.). I detta fall är datas roll som grund i detta examensarbete dess primära ändamål och detta ändamål anses ha uppfyllts när examensarbetet är godkänt.

Det skall här även nämnas att jag som undersökare under den tid som denna studie genomfördes även arbetat som vikarie för en av de deltagande grupperna. Jag har gjort mitt bästa för att se till att eleverna inte lät detta påverka deras val av medverkan genom att göra det tydligt att det var helt frivilligt att delta. Det kan dock inte helt uteslutas att dessa elevers beslut att delta påverkats av min roll som deras vikarie.

Intressekonflikt

Det existerar en intressekonflikt i och med att jag som undersökare även är den som designat spelet XYZ. Detta gör att det är möjligt att jag kan vara mer benägen att lyfta fram de positiva sidorna av spelet. Det har aldrig varit min intention att göra det och jag har gjort mitt bästa för att hålla en neutral ställning i denna studie. Det kan dock inte helt uteslutas att mitt omdöme kan ha påverkats och därmed överlämnas det till läsaren att själv göra en bedömning om min trovärdighet utifrån denna information.

3.5 Avgränsningar

I denna studie kommer endast en version av spelet XYZ som konstruerats med Matematik 4 i åtanke att användas. Studien avgränsas därmed till kursen Matematik 4. Denna avgränsning leder vidare även till en avgränsning med avseende på gymnasieprogram. Avgränsningen som görs är att studien genomförs med endast Naturvetenskapsprogrammet och Teknikprogrammet i åtanke vad gäller gymnasieprogram. Avgränsningen till att endast använda spelet XYZ görs eftersom det är det enda spelet som identifierats som ett spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser på den utbildningsnivå som studien genomförs.

Studien avgränsas till att endast behandla resonemangsförmågan utav de sju matematiska förmågorna. Denna avgränsning har gjorts utifrån de kommentarer som getts för de sju matematiska förmågorna av Skolverket (u.å.) och Juter (2014) där aspekter av de övriga förmågorna har identifierats som gjort dem mindre intressanta att studera i denna studie. Begreppsförmågan och kommunikationsförmågan ansågs vara allt för starkt förknippade med formell matematik, medan den situation som skulle observeras i denna undersökning bedömdes vara av en mer informell karaktär. Procedursförmågan förväntades inte ha en allt för stor roll att spela då eleverna inte förväntades ha färdiga procedurer att följa. Modelleringsförmågan och relevansförmågan behandlade aspekter av att använda matematik i realistiska och verklighetsbaserade situationer, något som inte heller ansågs vara relevant för just den situation som skulle observeras i denna studie. Kvar är då problemlösningsförmåga och resonemangsförmåga. Dessa två är oftast nära sammanbundna och det gjorde det svårt att avgöra vilken som skulle väljas. Tolkningen som gjordes var dock att problemlösningsförmågan var beroende av resonemangsförmågan, medan resonemangsförmågan sågs som mer oberoende. Detta gjorde att resonemangsförmågan ansågs vara den förmågan av de sju som var lämpligast att fokusera på. Därmed har beslutet fattats att denna studie avgränsas till att endast behandla resonemangsförmågan.

I denna studie avgränsas även de ingenjörsmässiga förmågorna till att endast bestå utav det urval som presenterats i kapitel 2.2. Detta görs för att avgränsa studiens omfattning till något

som bedömts som hanterbart för en ensam undersökare under den givna tidsramen för arbetet med denna studie.

4 Resultat

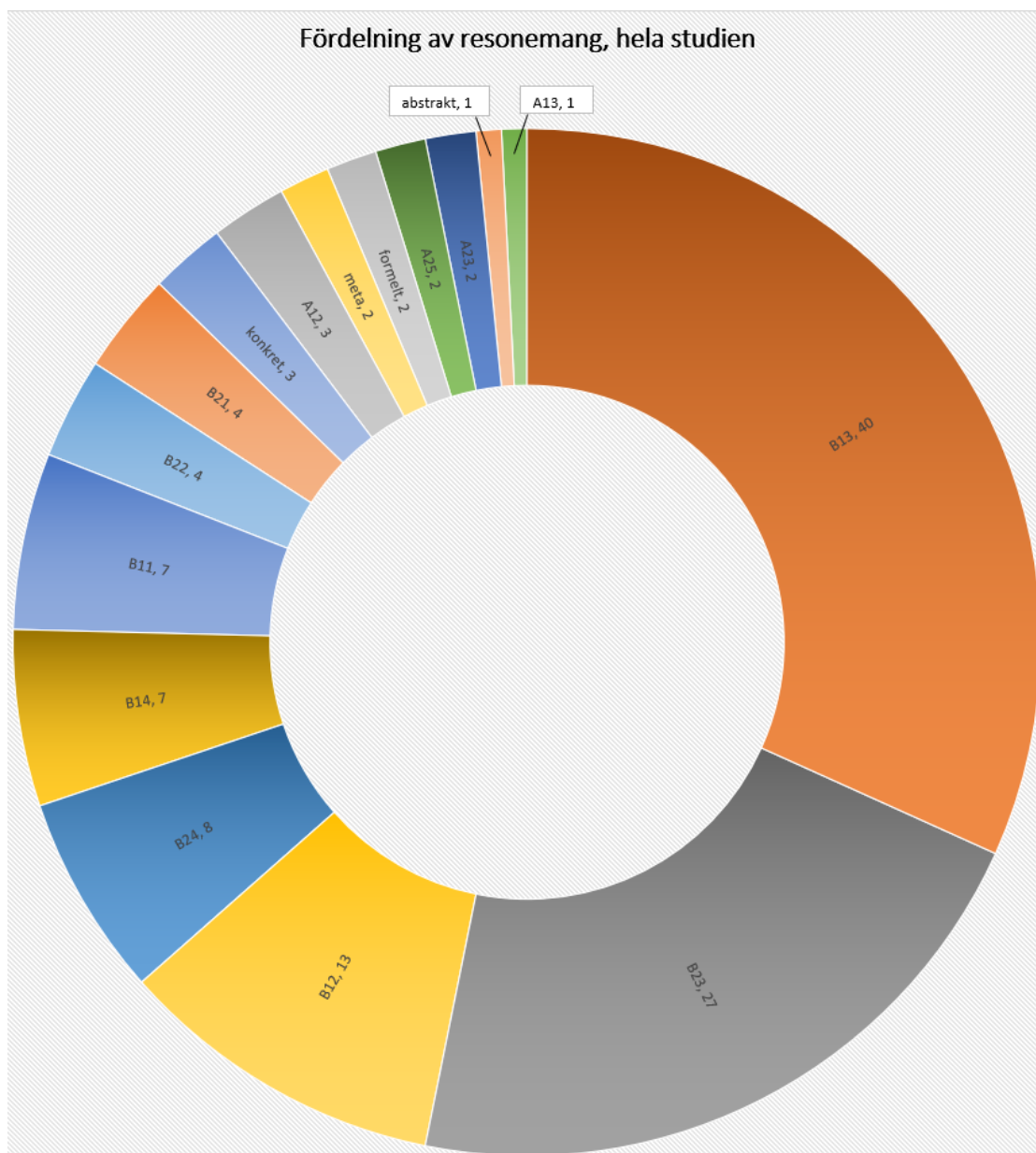
4.1 Sammanfattning av resultat

Totalt identifierades 126 stycken sammanhängande resonemang. Utav dessa identifierades 118 som matematiska och 8 som icke-matematiska, 121 identifierades som ingenjörsmässiga och 5 som icke-ingenjörsmässiga. De matematiska resonemangen fördelade sig på 12 utav de 18 möjliga kombinerade kategorierna från induktivt/deduktivt, imitativt/kreativt och MOHC. De icke-matematiskas resonemangen fördelade sig på 4 av de 5 kategorierna från MOHC. Med avseende på ingenjörsmässiga förmågor fördelade sig elevernas resonemang bland 13 av de 15 utvalda kategorierna från CDIO syllabus. Användningen av det studerade spelet levde upp till 4 av de 5 förväntningarna som formulerats utifrån de olika ramverken.

4.2 Elevers resonemang

Jag börjar här med att presentera de vanligaste formerna av resonemang på olika nivåer. Efter det följer exempel med elevcitat för att exemplifiera hur kategoriseringen har gjorts för de olika kategorierna som observerats i den här studien. I elevcitaten förekommer de koder som används för att identifiera varje kort. För en beskrivning av vad som står på ett specifikt kort hänvisas läsaren till bilaga 2 där en komplett lista över korten återfinns.

I figur 3 nedan presenteras en övergripande bild på fördelningen av resonemang i de kombinerade kategorierna.



Figur 3. Diagram med fördelningen av samtliga 126 resonemang, kategorikoden följs av antalet resonemang.

4.2.1 De vanligaste resonemangen

I tabell 4 visas de vanligaste formerna av resonemang på olika nivåer för de olika ramverken. För en mer detaljerad presentation hänvisas läsaren till bilaga 5.

Tabell 4. Vanligaste form av resonemang för hela studie, varje speltillfälle samt varje spelare.

	Kombinerade	Induktivt/Deduktivt	Imitativt/Kreativt	MOHC	
Hela studien	B13	Deduktivt	Imitativt	Formellt	
Tillfälle 1	B23	Deduktivt	Kreativt	Formellt	
Tillfälle 2	B13	Deduktivt	Imitativt	Formellt	
Tillfälle 3	B13	Deduktivt	Imitativt	Formellt	
Spelare 1	B12	Deduktivt	Imitativt	Abstrakt och Formellt	
Spelare 2	B13	Deduktivt	Imitativt	Formellt	
Spelare 3	B13	Deduktivt	Imitativt	Formellt	
Spelare 4	B23	Deduktivt	Kreativt	Formellt	
Spelare 5	B13	Deduktivt	Imitativt	Formellt	
Spelare 6	B13	Deduktivt	Imitativt	Formellt	
Spelare 7	B13	Deduktivt	Kreativt	Formellt	
Spelare 8	B13	Deduktivt	Imitativt	Formellt	
Spelare 9	B13 och B23	Deduktivt	Imitativt och kreativt	Formellt	
Spelare 10	B13	Deduktivt	Imitativt och kreativt	Formellt	
Spelare 11	B23	Deduktivt	Kreativt	Formellt	
Spelare 12	B12	Deduktivt	Imitativt	Abstrakt	
Spelare 13	B13	Deduktivt	Imitativt	Formellt	

Som det går att se i tabell 4 var det vanligaste formen av resonemang i studien deduktivt imitativt formellt resonemang (B13). På individnivå var deduktivt imitativt formellt resonemang (B13) det vanligaste resonemanget bland 9 av de 13 eleverna. Uppdelning utifrån de tre olika ramverken visade att i hela studien var deduktivt vanligare än induktivt, imitativt var vanligare än kreativt, formellt var vanligare än de övriga kategorierna i MOHC. Under speltillfälle 1 var det vanligaste resonemanget deduktivt kreativt formellt. Vidare var deduktivt vanligare än induktivt, kreativt var vanligare än imitativt, formellt var vanligare än de övriga kategorierna i MOHC under speltillfälle 1. Under speltillfälle 2 var det deduktivt imitativt formellt som var det vanligaste resonemanget. Vidare var deduktivt vanligare än induktivt, imitativt var vanligare än kreativt och formellt var vanligare än de övriga kategorierna i MOHC under speltillfälle 2. Under speltillfälle 3 var deduktivt imitativt formellt

den vanligaste formen av resonemang. Vidare var deduktivt vanligare än induktivt, imitativt var vanligare än kreativt och formellt var vanligare än de övriga kategorierna i MOHC under speltillfälle 3.

4.2.2 Exempel från kategoriseringen av matematiska resonemang

I det här avsnittet exemplifieras de olika kategorierna för matematiskt resonemang med hjälp av elevcitat. Elevcitaten är resonemang som uppfyllt kraven för att kategoriseras i de olika kategorierna och efter det följs det av en förklaring till vad det är som lett till kategoriseringen. Detta avsnitt avslutas med en lista med de kategorier som inte identifierats bland elevernas resonemang.

Induktivt imitativt abstrakt resonemang (A12)

”Typ också det här med slumpandet, hur man ska göra sin egen graf för att ja det är ju enkelt ifall vi valde ju utfallsrummet 0 till 100 varje gång för att vi på lättaste sätt skulle kunna göra en rät linje men alltså.” - Spelare 5

Det här resonemanget har kategoriserats som induktivt eftersom eleven här gått från att studera några olika möjligheter att konstruera en slumpfunktion på och kommit till slutsatsen att det generellt är lättast att använda sig av ett utfallsrum mellan 0 och 100. Resonanget har kategoriserats som imitativt då det inte uppfyller kravet att vara nytt för resoneraren då eleven imiterar det resonemang som framkommer i reglerna angående slumpfunktionen. Resonanget kategoriseras som abstrakt då eleven gör ett generellt uttalande om vilket val av variabeln ”utfallsrum” som ger det enklaste beräkningarna. Allt detta sammanställs till att resonemanget uppfyller kraven för att kategoriseras som induktivt imitativt abstrakt resonemang.

Induktivt imitativt formellt resonemang (A13)

”Ja, och jag valde y3 då som ... är ganska enkel funktion. ... Det är typ det som brukar funka, det är då det går bra för mig...” -Spelare 1

Detta resonemang har kategoriserats som induktivt då eleven formulerar ett generellt samband över vilka val av y-kort som gör att det går bra. Resonanget kategoriseras dock som imitativt då eleven redan hört andra elever resonera på liknande sätt och det därmed inte uppfyller kravet att vara nytt. Resonanget kategoriseras som formellt eftersom det nu beskriver hur valet av en variabel, y-kort, påverkar en annan variabel, hur det går i spelet. Sammantaget kategoriseras därför detta resonemang som induktivt imitativt formellt resonemang.

Induktivt kreativt formellt resonemang (A23)

"Ifall man... inte måste ha en rät linje, man kan ha en kurva. I så fall kan man ju få liksom flera ... placeringar som har samma värde. Alltså flera y-värden som då översätts till våra x-värden..." -Spelare 5

Detta resonemang har kategoriserats som induktivt då eleven formulerar en slutsats om hur slumpfunktionen kan förändras genom att man använder någon form av kurva istället för en linjär avbildning. Resonemanget kategoriseras som kreativt då det är nytt för eleven, det bedöms finnas argument för varför det fungerar och det är förankrat i inneboende matematiska egenskaper för kurvor. Vidare kategoriseras resonemanget som formellt då eleven beskriver sambandet mellan slumptalet och x-värdet. Detta gör att resonemanget slutligen kategoriserats som induktivt kreativt formellt resonemang.

Induktivt kreativt metasystematiskt resonemang (A25)

"Tja, också i början istället för att välja var sitt x-kort valde vi bort två x-kort. Vilket då gav ett x-kort vi skulle ta och spela runt, istället för var sitt. Sedan slumpade vi ett gemensamt tal. Vi valde bort de dåliga korten så att säga... men det fungerade till viss mån." -Spelare 3

Detta resonemang kategoriseras som induktivt då eleven efter att ha studerat en alternativ uppsättning av spelregler kommer fram till att det går att spela även med andra regler. Resonemanget bedöms som kreativt eftersom det är nytt för eleven (och undersökaren), det bedöms finnas argument för varför det fungerar och det är förankrat i de inneboende matematiska egenskaperna av hur x- och y-korten samspelar. Slutligen kategoriseras resonemanget som metasystematiskt då det behandlar ett alternativt system (spel). Sammantaget gör detta att resonemanget kategoriseras som induktivt kreativt metasystematiskt resonemang.

Deduktivt imitativt konkret resonemang (B11)

"Jag valde x4... jag vet inte varför jag valde. För att säkert det är positivt." -Spelare 2

Det här resonemanget har kategoriserats som deduktivt då elevens identifiering av värdena på x-kortet som positiva ses som en tillämpning av matematiska kunskaper, om än i en något basal form. Resonemanget kategoriseras som imitativt då det, för eleven, inte verkar finnas några argument för varför resonemanget fungerar och det heller inte framstår som att det är ett, för eleven, nytt resonemang. Resonemanget kategoriseras även som konkret då inga generaliseringar görs av eleven, utan fokus ligger på denna enstaka situation. Sammantaget gör detta att resonemanget kategoriseras som deduktivt imitativt konkret resonemang.

Deduktivt imitativt abstrakt resonemang (B12)

"... jag valde y_{12} eftersom jag tänkte att den är störst chans att bli positiv och så stort y -värde som möjligt." -Spelare 12

Detta resonemang har kategoriserats som deduktivt då eleven bedöms ha använt sig av sina matematikkunskaper för att uppskatta vilka värden som är möjliga för detta y -kort. Vidare bedöms resonemanget som imitativt då det inte framstår som att det är ett för eleven nytt resonemang. Elevens resonemang bedöms även som abstrakt då eleven behandlar y -värdet som en variabel men utan att göra några utsagor om vad det värdet kan bero på eller påverka. Sammantaget kategoriseras därför resonemanget som deduktivt imitativt abstrakt resonemang.

Deduktivt imitativt formellt resonemang (B13)

"Sen valde jag den där funktionen, $4x + 40$. Jag tänkte det är väldigt enkelt att räkna på, om jag får en positivt då sannolikheten ganska stor att vinna ..." -Spelare 4

Resonemanget kategoriseras som deduktivt då eleven tillämpar sina matematiska kunskaper angående räta linjens egenskaper. Elevens resonemang kategoriseras som imitativt eftersom liknande resonemang har förts av eleven vid tidigare tillfällen och det finns inga indikationer på att eleven skulle ha glömt dessa. Resonemanget kategoriseras som formellt då eleven behandlar hur funktionens värde påverkas av de möjliga x -värdet. Sammantaget kategoriseras detta resonemang som deduktivt imitativt formellt resonemang.

Deduktivt imitativt systematiskt resonemang (B14)

"Det jag kände direkt vad jag ville ha, var att jag ville ha $z8$. Och den är z är lika med x gånger y . jag tyckte att det var en väldigt härlig och enkel funktion som, då behöver man inte tänka så många steg. Då vill man ha höga x -värden och höga y -värden." -Spelare 7

Elevens resonemang kategoriseras här som deduktivt då eleven bedöms tillämpa sina kunskaper om produkten mellan två tal för att avgöra vilka värden på x och y som är önskvärda. Resonemanget kategoriseras som imitativt eftersom det inte verkar vara ett nytt resonemang för eleven. Resonemanget kategoriseras som systematiskt eftersom eleven här behandlar x och y som oberoende variabler som bestämmer värdet på en tredje. Sammantaget kategoriseras resonemanget som deduktivt imitativt systematiskt resonemang.

Deduktivt kreativt konkret resonemang (B21)

"Då valde jag x_{12} och det var för att intervallet var positivt jag valde det." -Spelare 1

Detta resonemang kategoriserades som deduktivt då eleven tillämpar sina matematikkunskaper för att identifiera att intervallet är positivt. Vidare kategoriseras resonemanget som kreativt då det uppfyller de tre kraven för kreativt resonemang. Det är första gången som eleven gör detta resonemang, det är förankrat i att talen i intervallet är positiva som är en inneboende matematisk egenskap och slutligen bedöms det finnas argument för varför ett positivt värde är önskvärt i detta sammanhang. Resonemanget kategoriseras som konkret eftersom eleven inte gör några försök till generaliseringar och inget tyder på att eleven behandlar en variabel i sitt resonemang. Sammantaget så kategoriseras resonemanget som deduktivt kreativt konkret.

Deduktivt kreativt abstrakt resonemang (B22)

"Ja... Jag tänkte att jag ville ha ett så stort intervall som möjligt och det är ju bara 6 steg emellan dem hära och här är det 7." -Spelare 6

Här kategoriseras resonemanget som deduktivt eftersom eleven använder matematiska kunskaper för att avgöra vilket intervall som är störst. Resonemanget kategoriseras vidare som kreativt då det var ett nytt resonemang för eleven, det grundades i intervallens storlek som är en inneboende matematisk egenskap och det bedömdes finnas argument för varför detta kan vara ett vettigt resonemang. Resonemanget kategoriserades som abstrakt då eleven hanterar intervallet som en variabel som denne beskriver ett krav på och sedan väljer det som uppfyller kravet. Sammanfattningsvis kategoriserades resonemanget som deduktivt kreativt abstrakt.

Deduktivt kreativt formellt resonemang (B23)

"... med x-kortet jag valde, x17. Jag tänkte att -6 till -4, ja det blir bra för att hamna under 70, eftersom det är plus 17x och är x negativt blir talet betydligt mindre än det. Så långt tänkte jag på den." -Spelare 9

Det här resonemanget har kategoriserats som deduktivt då eleven tillämpar sina matematikkunskaper för att utvärdera vilka värden som kan förväntas av funktionen på y-kortet. Resonemanget kategoriseras även som kreativt då det är nytt för eleven i den mån att eleven möter en ny situation som kräver ett nytt resonemang, samtidigt så är det förankrat i de inneboende matematiska egenskaperna i funktionen och det finns förutsäggande argument för varför det här resonemanget kommer att fungera. Resonemanget kategoriseras som formellt eftersom två variabler x och y används och sambandet mellan dem behandlas. Sammantaget kategoriseras detta resonemang som deduktivt kreativt formellt resonemang.

Deduktivt kreativt systematiskt resonemang (B24)

"I slutändan så valde jag ju den där, det är ju för att, resoneringen är ju att då behöver du ju ett y-värde som är positivt och x-värdet har som ingen betydelse, och sen kan man, slumpfunktionen kan man. Slumpfunktionen kan ju ge ganska bra x-värden så valde jag den. En enkel funktion som fortfarande har möjlighet att ge väldigt höga värde." -Spelare 8

Elevens resonemang kategoriseras här som deduktivt då eleven tillämpar sina matematikkunskaper för att utvärdera inverkan av x- och y-värdet på z-funktionen. Resonemanget kategoriseras vidare som kreativt då det är ett för eleven nytt resonemang som är förankrat i de inneboende matematiska egenskaperna i funktionen samt så finns det förutsäggande argument för varför resonemanget kommer att fungera. Resonemanget kategoriseras även som systematiskt här då x- och y- värdet behandlas som oberoende variabler som påverkar den tredje variabeln z-värdet. Sammantaget så kategoriseras detta resonemang som deduktivt kreativt systematiskt resonemang.

Induktivt imitativt konkret resonemang (A11) och Induktivt kreativt konkret resonemang (A21)

A11 och A21 har båda bedömts vara teoretiskt omöjliga på grund av den konflikt som uppstår mellan kraven för induktivt resonemang och konkretresonemang, se kapitel 2.

Inga resonemang har heller identifierats i studien som skulle motbevisa denna teoretiska slutsats.

4.2.3 Exempel från kategorisering av icke-matematiska resonemang

Konkret resonemang (konkret)

"... Man kör ju på känsla... Jag hade ingen taktik jag körde bara..."
-Spelare 2

Här har elevens resonemang kategoriserats som konkret eftersom det inte behandlar matematik och inga generaliseringar görs av eleven.

Abstrakt resonemang (abstrakt)

"...jag känner att jag inte riktigt ännu har hittat riktigt hur man ska tänka, asså hur man ska ha en bra taktik i spelet men annars så här förstå hela spelet annars var typ tycker jag man fattade ganska snabbt." -Spelare 1

Det här resonemanget har kategoriserats som abstrakt eftersom det inte behandlar matematik men gör en generalisering kring taktik.

Formellt resonemang (formellt)

”Har ni alltid undvikit, eller Spelare 3 har du alltid undvikit att ta jobbiga kort? ... Har det gått bra?” -Spelare 5

Detta resonemang har kategoriserats som formellt eftersom det inte behandlar matematik men behandlar hur valet att undvika ”jobbiga kort” har påverkat utfallet av spelet.

Metasystematiskt resonemang (meta)

*”... det är ingen av oss som har... nån taktik i hur man gör den här slumpmetoden så, då spelar det ingen roll ifall alla bara kör miniräknare.”
-Spelare 5*

Detta resonemang kategoriseras som metasystematiskt då de behandlar hur spelet skulle kunna förändras om spelarna valde en annan strategi.

4.2.4 Kategorier för resonemang som inte observerats

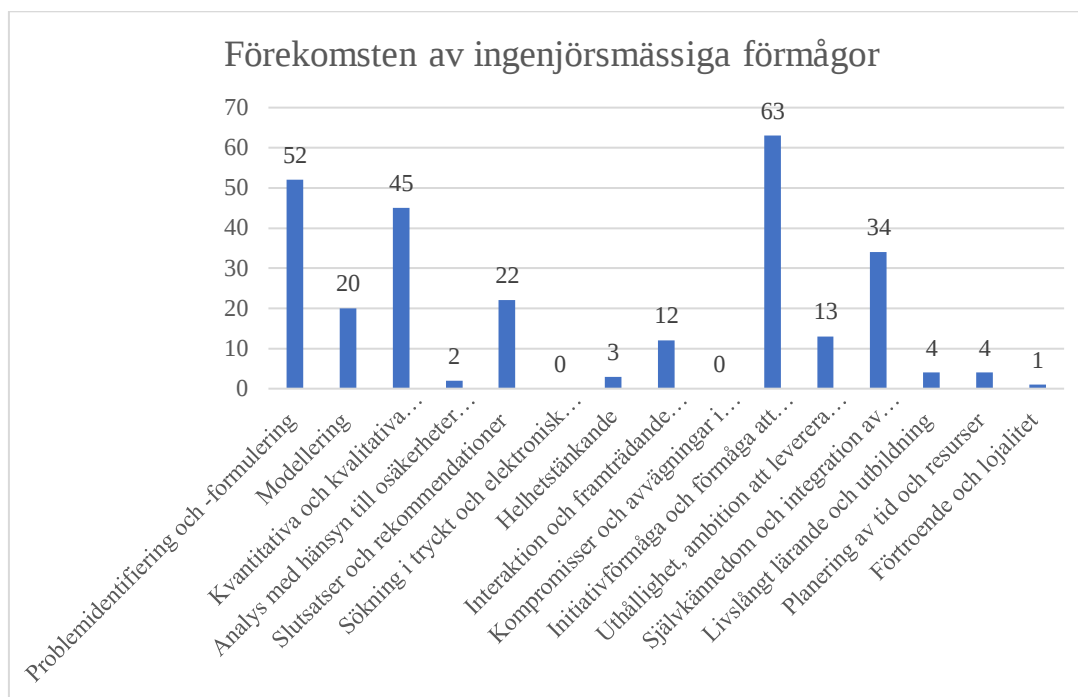
Följande kategorier för resonemang har inte observerats i denna studie:

- Induktivt imitativt systematiskt resonemang (A14)
- Induktivt imitativt metasystematiskt resonemang (A15)
- Induktivt kreativt abstrakt resonemang (A22)
- Induktivt kreativt systematiskt resonemang (A24)
- Deduktivt imitativt metasystematiskt resonemang (B15)
- Deduktivt kreativt metasystematiskt resonemang (B25)
- Systematiskt resonemang (system)

4.3 Elevernas ingenjörsmässiga förmågor

För att bedöma ingenjörsmässiga förmågor användes det urval av kategorier från CDIO syllabus (2011a) som presenterades i kapitel 2.2. Nedan presenteras sammanställningen av frekvensen av de olika kategorierna och det följs sedan av exempel som demonstrerar vad som krävdes av ett resonemang för att tillhöra de olika kategorierna.

4.3.1 Fördelning över kategorierna



Figur 4. Grafen visar antalet resonemang som identifierats tillhöra de olika kategorierna för ingenjörsmässighet. Ett resonemang kunde kategoriseras som tillhörande mer än en kategori vilket gör att summan av alla dataelement överskrider 126.

Som det går att se i figur 4 så identifierades i den här studien resonemang som uppfyllde kraven för 13 av de 15 kategorier som användes för ingenjörsmässighet. Utav dessa var de kategorier som var mest frekventa Problemidentifiering och -formulering, Kvantitativa och kvalitativa uppskattningar samt Initiativförmåga och förmåga att fatta beslut under osäkerhet.

4.3.2 Exempel från kategoriseringen av elevernas ingenjörsmässiga förmågor

Problemidentifiering och -formulering (2.1.1.)

”Asså min plan var att välja en funktion som man kan få så ... högt y-värde som möjligt. Till exempel jag har valt den där $4x + 40$ och ... jag visste att ja jag väljer den här och jag måste välja en positivt värde också på den här annars är det kört” - Spelare 4

I det här resonemanget visar eleven att den gjort upp en plan för hur hen ska vinna partiet, det gör att den uppfyller kravet för att kategoriseras som 2.1.1.

Modellering (2.1.2.)

”Jag tänkte tvärt emot, jag tänkte jag vill ha sin eller cos för det är simpelt. Och att den du valde är en sån här jobbig med intervall.” -Spelare 5

I det här resonemanget har eleven gjort ett antagande genom att klassa de funktioner med trigonometriska uttryck som enklare än en funktion med intervallkrav och därmed ses de som mer önskvärda alternativ. Detta gör att resonemanget uppfyller kravet för att kategoriseras som 2.1.2

Kvantitativa och kvalitativa uppskattningar (2.1.3.)

”Jag ögnar igenom generellt bara igenom y-korten väldigt snabbt och ser har den som ser det så ut att de e största y-värdet utav dem... Ja, titta på slutsiffrorna och vad x är.... Nej, det där, och det där det är litet så det spelar ingen roll.” -Spelare 3

I det här resonemanget visar eleven att denne har gjort en storleksuppskattning av x-värdets inverkan på y-värdet och uppfyller därmed kravet för att kategoriseras som 2.1.3. Liknande uppskattningar har återfunnits i de flesta resonemang som tilldelats denna kategori vid innehållsanalysen.

Analys med hänsyn till osäkerheter och risker (2.1.4.)

”Vi valde båda z4, eftersom att z4 har ett stort negativt y och många av mina y-kort kunde potentiellt bli stora negativa y:n. Och då valde jag tillslut y1 eftersom den med ett stort x kan den bli ganska hyfsat stort negativt y-tal. Och då valde jag x-kortet som kunde få störst positivt x, som var -1 till 4 i intervall. Och då fick jag värdet 0, vilket inte är så bra. Mitt y-värde är -15 och mitt z-värde bara 15, så den hade potential som var bra men det gjorde det inte.” -Spelare 9

Här har eleven resonerat kring potentialen till att få ett bra y-värde och i viss mån vägt detta mot risken att inte få det önskade y-värdet. Detta gör att resonemanget bedöms uppfylla kravet för att kategoriseras som 2.1.4.

Slutsatser och rekommendationer (2.1.5.)

”Ja ... min enda taktik var att få så många olika... positiva värden... för att sen vinna eftersom vårt z-värde det var ju...nä jag v-, näh... Men ändå, vi hade tagit upphöjt till 2 så hade ju blivit positivt ändå, så det hade inte spelat nån roll. Så jag vet inte vad jag tänkte riktigt...” -Spelare 1

Här identifierar eleven en brist i sin ursprungliga taktik och konstaterar att det fanns ett bättre sätt att lösa problemet på. Detta gör att resonemanget kategoriseras som 2.1.5.

Helhetstänkande (2.3.1.)

”För hade jag liksom kunnat få fram ja, dragit y-kortet snabbaste än hade jag kunnat välja det bättre x-kortet i så fall och då hade du också kunnat få dra minuskortet” -Spelare 3

I detta resonemang visa eleven förståelse för hur ett parti hade kunnat förändras helt bara genom att denne fått fram sitt y-kort först. Därmed anses det uppfylla kravet för att kategoriseras som 2.3.1.

Interaktion och framträdande egenskaper hos system (2.3.2.)

”... då valde jag och Spelare 4 den här kortet, x gånger y . Då vet jag direkt att jag vill få den här så mycket minus som möjligt, alltså x minus och y ska bli minus för att de ska bli stor. Så tog jag den här och jag var sist att välja x för jag visste att dem här att de skulle välja positiva talet så jag tar den här stora negativa talen på mitt intervall av de här så fick ... -9 , så jag räkna ut ... så jag fick $y = -91$... Ja i alla fall det blir -91 så tar jag gånger, -91 gånger -9 det blir ju då positivt och blir 819 . Det var min taktik... Så jag vill spela minus, minus för att jag vet att de här kommer att spela positivt. Jag var ett steg före de hära.” -Spelare 2

I det här resonemanget visar eleven förståelse för hur de andra spelarnas val kommer att påverka dennes förutsättningar och lägger upp en strategi utifrån detta. Det gör att resonemanget anses uppfylla kravet för att kategoriseras som 2.3.2.

Initiativförmåga och förmåga att fatta beslut under osäkerhet (2.4.1.)

”Jag kände samma sak, att den är enkel... $y + 2x^2$ är funktionen. Och då tänkte jag, det är positiva stora tal vi jobbar med och det är, det gillar jag. De här andra tyckte jag, inte att de var svåra men, det här är väll absolutbelopp och så där, och då får man tänka ett extravarv. Så jag försökte att hålla det enkelt.” -Spelare 7.

Här visar resonemanget att eleven fattat ett beslut utifrån den tillgängliga informationen och det har därför kategoriserats som 2.4.1.

Uthållighet, ambition att leverera och anpassningsförmåga (2.4.2.)

”Jag slumpade -8 , fick ett y -värde på -52 och mitt z -värde blev $+52$. Så, det gick ungefär som planerat.” -Spelare 11

Här har eleven uttryckt ett ansvar för utfallet och resonemanget kategoriseras därmed som 2.4.2.

Ett ytterligare exempel är:

"Och den här gången så tänkte jag bara, 'nä, nu ska det bli lite svårare för ...Spelare 6.' För jag har alltid tänkt att man ska ta den enklaste formeln på y-kortet och då tänkte jag bara 'nä, nu ska vi svåra till det.' Och jag tänkte också att jag ville ha positivt och kom fram till att y11 skulle antagligen bli positivt om jag valde ett intervall som va negativt. Antog jag, jag tror att det var så jag tänkte. Så då valde jag y11 då. Och det är $45\ln(10,5x) - 60$. Så ja, jag valde alltså den." -Spelare 6.

Här har eleven visat på mod genom att göra något som denne identifierat som svårt istället för att göra något enkelt och resonemanget kategoriseras därmed som 2.4.2.

För en komplett lista med de krav som kunde uppfyllas för att resonemanget skulle kategoriseras som 2.4.2. hänvisas läsaren till CDIO syllabus på engelska (CDIO, 2011b).

Självkänedom och integration av kunskaper (2.4.5.)

*"De korten jag har på handen, y-korten, så kollade jag lite olika. Jag har en, y8, som jag la ut till slut... och den är så att det är $4 * 0,75^x$ och sen -23 . Och då tänkte jag alltså att det här kan bli ett ganska stort tal... exponent och då så valde jag den. De här andra de kan säkert funka jättebra men de är som sagt ... lite större trigonometri... så jag försökte hålla mig till det enkla och tog y8." -Spelare 7*

Här visar elevens resonemang på en självkänedom i formen av hur denne tänkte när den gjorde sina val. Eleven noterar även att andra y-kort hade kunnat fungera men att denne istället valde att gå med det som den var mest säker på.

Livslångt lärande och utbildning (2.4.6.)

"Varför valde du y25? Det är massa sinus och grejs.... Hur vet du att den är positiv?... Men sinus kan ju bli minus..." - Spelare 5

Här har eleven identifierat en brist i en annan elevs resonemang och gör ett försök att lära denne vilka egenskaper sinuskurvan har. Detta gör att resonemanget bedöms uppfylla kravet för att hjälpa andras inläring och det kategoriseras därför som 2.4.6.

Planering av tid och resurser (2.4.7.)

”Ja, för det kändes mycket lättare med x- och y-kort. Och så gjorde man med z-kort, och så kommer vi få göra det här igen så vi tog det lite lugnt ...” - Spelare 3

I det här resonemanget förklarar eleven sitt och sin medspelares val av att börja med en förenklad version av spelet som endast använde x- och y-korten. Detta framstår som en prioritering av att lära sig grunderna innan man går vidare till det fulla spelet, något det finns tid för vid de senare speltillfällena. Detta gör att resonemanget uppfyller kravet för att kategoriseras som 2.4.7.

Förtroende och lojalitet (2.5.6.)

”Jag vill ha z8 eftersom det är enklast, som Spelare 3 säger... Vi kör alltid enklast.” -Spelare 2

I det här resonemanget tydliggör eleven att denne har inspirerats av en annan elev och därmed uppfyller resonemanget kravet för att kategoriseras som 2.5.6.

4.3.3 Kategorier av ingenjörsmässiga förmågor som inte observerats

Följande kategorier av ingenjörsmässiga förmågor har inte observerats i denna studie:

- Sökning i tryckt och elektronisk litteratur (2.2.2)
- Kompromisser och avvägningar i val av lösningar (2.3.4)

4.4 I förhållande till förväntningarna

Här presenteras resultatet kring hur väl användningen av det studerade spelet levde upp till de förväntningar som formulerats utifrån de olika ramverken och som presenterades i kapitel 2.3.

Tabell 5. I denna tabell presenteras huruvida användningen av spel levde upp till de olika förväntningar som tidigare formulerats. En kort motivering till varför eller varför inte användning av spel anses leva upp till förväntningarna formulerade utifrån ramverket presenteras i den tredje kolumnen.

Ramverk	Användning av spel lever upp till förväntningarna (Ja eller Nej)	Motivering
Induktivt/deduktivt	Ja	Matematiska resonemang förekom, både induktiva och deduktiva resonemang förekom.

Tabell 5. – Fortsättning på tabell från föregående sida.

Ramverk	Användning av spel lever upp till förväntningarna (Ja eller Nej)	Motivering
Imitativt/kreativt	Ja	47 av de 126 resonemang som observerats var kreativa och 71 var imitativa. Andelen kreativa resonemang är alltså högre än en tiondel.
MOHC	Ja	Samtliga 5 former av resonemang som presenterats i ramverket MOHC förekom.
Kombinerat ramverk för resonemang	Nej	De 6 kategorierna av kombinationskategorierna för resonemang som inte förekom var alla av induktiv och/eller metasystematisk karaktär.
Ingenjörsmässiga förmågor	Ja	13 former av ingenjörsmässiga förmågor förekom.

Resultatet som presenteras i tabell 5 baseras på de resultat som presenterats tidigare i detta kapitel angående elevernas resonemang och ingenjörsmässiga förmågor. Som det går att se i tabell 5 levde användningen av det studerade spelet upp till 4 av de 5 ramverkens förväntningar.

5 Diskussion

5.1 Introduktion

I den här studien har syftet varit att undersöka hur resonemangsförmågan och ingenjörsmässiga förmågor visar sig när elever spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasiets matematikkurser. Syftet har även varit att utifrån det utvärdera denna typ av spels relevans för användning i matematikundervisning på gymnasiet. För att uppnå syftet har ramverk för resonemang och ingenjörsmässiga förmågor identifierats. För resonemang valdes ramverken induktivt/deduktivt, imitativt/kreativt och MOHC medan ett urval från CDIO syllabus utgjorde ramverket för ingenjörsmässiga förmågor. En fallstudie har sedan tillämpats där elever som spelat spelet XYZ har observerats och deras resonemang har

kategoriserats utifrån de valda ramverken för resonemang och ingenjörsmässiga förmågor med hjälp av innehållsanalys.

Det här kapitlet inleds med en sammanfattning av det resultat som presenterades i det tidigare kapitlet och följs sedan av besvarandet av de tre forskningsfrågorna som ställts i denna studie. Därefter följer en diskussion av resultatet utifrån de olika ramverken i tur och ordning och sedan diskuteras resultatet i förhållandet till studiens syfte. Detta följs sedan av en diskussion av de metoder som tillämpats och hur det fungerat i praktiken. Förslag på framtida forskning och förslag till lärare avrundar slutligen kapitlet.

5.2 Diskussion av resultatet

5.2.1 Kort sammanfattning av resultatet

Resultatet visar att eleverna för många olika former av resonemang när de spelar ett spel med matematiskt innehåll från gymnasiets matematikkurser, spelet XYZ. De flesta av dessa resonemang kan ses ha en matematisk karaktär. Det verkar även finnas mönster bland de olika formerna av matematiska resonemang, bland annat är den klart vanligaste formen av resonemang deduktivt imitativt formellt resonemang (B13), både sett till hela studien och individnivå. När vi sedan ser till de ingenjörsmässiga förmågorna som framkommer i resonemangen ser vi att det även där är några kategorier som är vanligare än andra medan andra inte förekommer alls eller endast vid ett fåtal tillfällen. De vanligaste formerna av ingenjörsmässiga förmågor var initiativförmåga och förmåga att fatta beslut under osäkerhet, problemidentifiering och -formulering och kvantitativa och kvalitativa uppskattningar. Användningen av det studerade spelet levde även upp till nästan alla de förväntningarna som formulerats utifrån de olika ramverken. De förväntningar som användningen av detta spel inte levde upp till var de formulerade utifrån ramverket kombinerat ramverk för resonemang, då det fanns en tydlig trend kring vilka former av resonemang som inte behandlades.

Utifrån dessa resultat är det möjligt att besvara de tre frågeställningarna som formulerats i denna studie.

5.2.2 Svar på frågeställningarna

Här nedan följer besvarandet av varje frågeställning var för sig.

1. Vilka former av resonemang använder sig eleverna utav när de spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser?

Eleverna använder sig av ett flertal olika former av resonemang när de spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser. Eleverna använder sig av både matematiska resonemang och icke-matematiska resonemang när de spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser. Det är dock betydligt

vanligare att eleverna använder matematiska resonemang och den vanligaste formen av resonemang är deduktivt imitativt formellt resonemang. Var för sig förekommer resonemang från samtliga kategorier för resonemang från de tre ramverken induktivt/deduktivt, kreativt/imitativt och MOHC i någon form men samtliga av de teoretiskt möjliga kombinerade kategorierna av dessa tre ramverk förekom inte. Det är betydligt vanligare att elever använder deduktiva resonemang än induktiva resonemang när de spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser. Imitativa resonemang är något vanligare än kreativa resonemang och bland kategorierna från MOHC är formella resonemang vanligast. Samtliga former av resonemang som eleverna använder när de spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser är; induktivt imitativt abstrakt, induktivt imitativt formellt, induktivt kreativt formellt, induktivt kreativt metasystematiskt, deduktivt imitativt konkret, deduktivt imitativt abstrakt, deduktivt imitativt formellt, deduktivt imitativt systematiskt, deduktivt kreativt konkret, deduktivt kreativt abstrakt, deduktivt kreativt formellt, deduktivt kreativt systematiskt, konkret, abstrakt, formellt och slutligen metasystematiskt.

2. Vilka ingenjörsmässiga förmågor uppvisar elevernas resonemang när de spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser?

Elevernas resonemang uppvisade ett flertal ingenjörsmässiga förmågor när de spelade spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser. Elevernas resonemang visade främst på ingenjörsmässiga förmågor så som probleminfästning, uppskattningar samt initiativtagande och beslutsfattning under osäkerhet medan sådant som helhetstänkande, analys med hänsyn till osäkerhet samt förtroende och lojalitet endast uppvisades i ett fåtal av resonemangen. Samtliga ingenjörsmässiga förmågor som uppvisas av elevernas resonemang när de spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser är; probleminfästning och -formulering, modellering, kvantitativa och kvalitativa uppskattningar, analys med hänsyn till osäkerheter och risker, slutsatser och rekommendationer, helhetstänkande, interaktion och framträdande egenskaper hos system, initiativförmåga och förmåga att fatta beslut under osäkerhet, uthållighet, ambition att leverera och anpassningsförmåga, självkännedom och integration av kunskaper, livslångt lärande och utbildning, planering av tid och resurser och slutligen förtroende och lojalitet.

3. Hur är användning av det spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser som studerats relevant inom matematikundervisningen på gymnasiet?

Användning av det spel med matematiskt innehåll från gymnasieutbildningens matematikkurser som studerats är relevant för matematikundervisningen så till vida att

matematiska resonemang används när spel av denna typ används. Vidare förekommer både induktiva och deduktiva resonemang, även om den förstnämnda är något ovanlig. Resonemangen består även av en relativt hög andel kreativa resonemang vilket har efterfrågats inom matematikundervisningen på gymnasiet. Resonemangen fördelar sig även över samtliga fem komplexitetsnivåer från MOHC, som använts i denna studie, vilket indikerat att denna arbetsform kan vara relevant för samtliga komplexitetsnivåer. Ett flertal ingenjörsmässiga förmågor uppvisas även av eleverna när de spelar denna typ av spel vilket tyder på denna arbetsforms relevans för förberedelser för fortsatta studier på ingenjörsutbildningar. Där användning av spel med matematiskt innehåll från gymnasieskolans matematikkurser brister i relevans för tillämpning inom undervisningen är i att det inte täcker alla former av resonemang. Det innebär att relevansen för användning av denna typ av spel är begränsad till ett antal former av resonemang och det kan därmed krävas ett komplement för att täcka upp samtliga former av resonemang.

5.2.3 Matematiskt eller inte

Utav de 126 resonemang som hittats och kategoriserats i den här studien ansågs 118 vara matematiska. Detta ser jag som en tydlig indikation på att eleverna interagerade med det matematiska innehållet som fanns i spelet, snarare än att ignorera det. Om det varit en större mängd icke-matematiska resonemang hade det setts som att det fanns aspekter av spelet då eleverna bedömde att de inte behövde blanda in matematik för att fatta sina beslut. I och med att så inte var fallet ses detta resultat som en indikation på att eleverna funnit användning för sin matematikkunskap när de spelat spelet.

5.2.4 Induktivt eller deduktivt

Det klart tydligaste mönstret i resultatet är att de flesta matematiska resonemangen är deduktiva i sin karaktär och endast ett fåtal är induktiva. Jag ser detta som en indikation på att det spel som studerats, spelet XYZ, till sin natur är deduktivt. Det finns dock några induktiva resonemang, något jag ser som ett tecken på att det finns potential för eleverna att även föra sådana resonemang. Det kan vara möjligt att det främst är de deduktiva resonemangen som behövs direkt för att spela spelet medan de induktiva resonemangen kan komma att framträda mer när spelarna blivit mer erfarna. Det går att se att så har varit fallen i några av de exempel av induktiva resonemang som presenterats. Eleven har i dessa utgått ifrån sina tidigare erfarenheter i spelet för att skapa en generell bild av det. Med tiden när spelarna får mer erfarenheter och reflekterar över dessa är min spekulaton att det kan vara möjligt att fler induktiva resonemang framkommer. Under de förutsättningar som rådde vid undersökningen var det dock de deduktiva resonemangen som var vanligast.

5.2.5 Imitativt eller kreativt

De imitativa resonemangen är de vanligaste men det kan bero på att de kreativa resonemangen omvandlats till imitativa resonemang när de återanvänds. Som resultatet visar var det vanligare med imitativa resonemang än kreativa resonemang när man ser till hela studien. Det börjar dock med att kreativa resonemang har en majoritet under det första speltillfället till att andelen imitativa resonemang sedan får majoritet under det andra speltillfället och sedan fortsätter andelen imitativa resonemang att växa under det tredje speltillfället, se bilaga 5 för diagrammen som illustrerar detta. Det här fenomenet ser jag som något naturligt utifrån hur kraven är satta för kreativa resonemang. Lithner (2008) lägger stor vikt vid att resonemanget måste vara nytt för den som för det för att det ska kunna vara ett kreativt resonemang. Detta gör att om eleverna återanvänder sina kreativa resonemang vid ett senare tillfälle blir de imitativa resonemang. Min tolkning är att det är denna återanvändning av kreativa resonemang som har en betydande roll i att andelen imitativa resonemang ökar.

Att eleverna använder sig mer och mer av imitativa resonemang ser jag som ett tecken på att de stabiliserat sig kring en strategi för hur spelet ska spelas. Det krävs därmed inte så mycket mer kreativitet utan det går att förlita sig på de resonemang man fört tidigare. Min uppfattning är dock att eleverna inte har hittat den ultimata strategin för spelet, utan en som de i nuläget är bekväma med. Detta innebär att det skulle kunna uppstå en ny period av kreativa resonemang när eleverna omformar sin taktik i framtiden.

Förekomsten av kreativa resonemang framstår som relativt hög när resultatet från den här studien jämförs med det resultat som Sidenvall et al. (2015) och Jäder (2015) presenterat. Resultatet från dessa tidigare studier visade att runt en tiondel av alla resonemang som förekommer vid lösning av uppgifter i matematikläroböcker var kreativa. I den här studien har en dryg tredjedel av alla resonemang som identifierats varit kreativa. Vid det tredje speltillfället är dock andelen kreativa resonemang på ungefär den nivå som de presenterade av Sidenvall et al. (2015) och Jäder (2015), vilket kan vara en indikation på att vid långvarig användning av spelet kommer andelen kreativa resonemang att vara på liknande nivå som andelen vid upprepning i övningar.

Resultatet visar att alla utom en elev har presenterat kreativa resonemang. Detta kan vara en indikation på att spelet har uppnått det som Lithner (2017) efterfrågat, att ge samtliga elever möjlighet att arbeta med uppgifter där kreativa resonemang kan användas. Det är dock svårt att säga hur säkert detta är då ingen kartläggning av deltagarnas kunskapsnivåer, intresse och ambitioner inom matematik har genomförts i denna studie, vilket gör att det är svårt att avgöra om gruppen är representativ för befolkningen eller om den endast reflekterar en delgrupp med exempelvis specialintresse för matematik.

5.2.6 Modellen om hierarkisk komplexitet

Den vanligaste komplexitetsnivån var formella resonemang men samtliga fem komplexitetsnivåer fanns representerade i studien. Jag ser den majoritet som de formella resonemangen har som ett tecken på att spelet är utformat på ett sätt som stimulerar denna form av resonemang. Som Kjellström & Stålne (2011) poängterar kännetecknas formella resonemang av att individen gör en koppling mellan två variabler. I den här undersökningen förekom de formella resonemangen ofta i form av att spelarna resonerade kring hur exempelvis z-värdet påverkades av olika y-värden. Detta berör kärnan i spelets utformning och min tolkning blir därmed att spelets struktur stimulerar till uppkomsten av resonemang på den formella komplexitetsnivån. Liknande instanser för systematiska resonemang har även setts när spelarna spelar ett Z-kort som innehåller både ett y- och x-beroende. Spelarna har då ofta behandlat det som att z-värdet beror av värdet på två oberoende variabler, något som kännetecknar systematiska resonemang (Kjellström och Stålne, 2011).

Det skulle också vara möjligt att förklara varför det är relativt få resonemang på konkret och abstrakt nivå med just att variablers beroende av varandra är en så pass central del för spelet att det sällan inträffar att en variabel behandlas självständigt eller att ingen variabel behandlas alls. Att dessa former av resonemang förekommer tolkar jag som att spelet i sig inte tvingar spelarna till att föra resonemang på formell eller högre komplexitetsnivå, utan tillåter spelaren att själv avgöra vilken nivå resonemanget ska ligga på.

De metasystematiska resonemangen var väldigt få men deras förekomst tolkar jag som en indikation på att det åtminstone är möjligt att föra resonemang även på denna nivå när man spelar spelet. För att föra resonemang på den här nivån så som Kjellström & Stålne (2011) beskrivit det skulle det krävas att spelarna såg på spelet i sin helhet och reflekterade över dess struktur. Min uppfattning är att det är för mycket att förvänta sig av spelarna att de under den korta tidsperiod som studien genomfördes ska visa resonemang på metasystematisk nivå, speciellt om de inte motiveras till det av utomstående faktorer såsom en lärares frågor.

5.2.7 Kombinerade kategorier

Den vanligaste formen av resonemang var deduktivt imitativt formellt resonemang (B13), vilket överensstämmer med de vanligaste kategorierna sett till varje ramverk var för sig. Totalt återfanns 12 utav de 18 kombinerade kategorierna för resonemang. Detta överensstämmer även med de vanligaste kategorierna från varje enskilt ramverk, deduktivt var vanligare än induktivt, imitativt var vanligare än kreativt och formellt var den vanligaste från MOHC. Denna överensstämmelse är inget som är garanterat på förhand, det är möjligt att kombinationen av de vanligaste kategorierna inte är den vanligaste kombinationen. Jag tolkar därmed denna överensstämmelse som en indikation på att det är just deduktivt imitativt

formellt resonemang (B13) som är det vanligaste formen av resonemang och att det uttalandet ger en rättvis bild av hur data ser ut.

Utifrån resultatet är min uppfattning att spelet stimulerar ett deduktivt formellt resonemang bland spelarna när de spelar det. Det som sedan avgör om resonemanget är imitativt eller kreativt är om det är nytt för eleven eller inte. Detta baserar jag på att den näst vanligaste kombinerade kategorin är deduktivt kreativt formellt resonemang (B23), alltså är enda skillnaden mellan de två vanligaste resonemangen att de ena uppfyller kraven för att vara kreativt. I och med att min erfarenhet från kodningen är att det som oftast avgör om ett resonemang var kreativt eller inte var nyhetskravet och därmed är det det jag förväntar mig spela den avgörande rollen för om ett resonemang är imitativt eller kreativt. När man sedan bortser från den delen får kombinationen deduktivt formellt resonemang ensam majoritet. Dessa två kategorier har jag tidigare noterat verkar stimulerats av spelet var för sig och det faktum att kombinationen av de två utgör mer än hälften av alla resonemang som spelarna för när de spelar spelet ser jag som ett tecken på att spelet därmed även stimulerar specifikt denna kombination. Något mer som talar för att spelet stimulerar denna form av resonemang är det faktum att deduktivt imitativt formellt resonemang (B13) och deduktivt kreativt formellt resonemang (B23) är den vanligaste formen av resonemang bland 11 av de 13 spelarna. Denna form av resonemang är alltså inte endast vanligast när man ser till helheten utan även på individnivå.

5.2.8 Ingenjörsmässiga förmågor

Elevernas resonemang visade på ett flertal olika ingenjörsmässiga förmågor men främst var det förmågorna problemidentifiering, uppskattning och beslutsfattning under osäkerhet som framkom. Min tolkning är att problemidentifiering främst kommer av att eleverna under spelets gång ständigt måste identifiera vad det är de behöver göra. Förutsättningarna för hur de ska uppnå sitt slutliga mål förändras oftast från gång till gång vilket mycket väl kan bidra till att det är en återkommande uppgift att formulera det problem man står inför. Uppskattning framträdde främst i att eleverna gjorde snabba uppskattningar av vilka värden som de olika funktionerna kunde förväntas anta. Jag tolkar det som att eleverna gjorde detta för att snabbt orientera sig och få en uppfattning om de förutsättningar som rådde, då informationen som står direkt på korten inte alltid är helt tydlig. Förmågan att fatta beslut under osäkerhet och ta initiativ framkom enligt min tolkning då situationen var ny för eleverna. Eleverna var inte helt bekanta med reglerna och resurserna de hade till sitt förfogande så det rådde nästan ständigt en viss osäkerhet kring vad de gjorde, vilket ledde till att eleverna ständigt fattade beslut under osäkerhet. Trots det var eleverna villiga att fatta beslut utifrån den information de hade tillgång till och visade därmed på en förmåga att ta initiativ, enligt min tolkning.

Utav de 15 ingenjörsmässiga förmågorna som jag fokuserat på i den här studien var det två som inte framkom i elevernas resonemang, sökning i tryckt och elektronisk litteratur (2.2.2) och kompromisser och avvägningar i val av lösningar (2.3.4). Saknandet av sökning i tryckt och elektronisk litteratur (2.2.2) tolkar jag som att eleverna inte fann något behov av att söka information i andra källor, i alla fall framkom det inte i deras resonemang. Att kompromisser och avvägningar i val av lösningar (2.3.4) saknas är lite mer svårtolkat. Detta på grund av att det skulle kunna tolkas som att eleverna inte jämför de olika val de kan göra, något jag har observerat att de trots allt har gjort. Istället har det oftast rört sig om att eleverna har fokuserat på vad som gör ett val bättre än ett annat, snarare än att diskutera de svagheter som finns i det val de gjort och därmed har jag inte tolkat det som att det handlar om kompromisser.

I och med att dessa förmågor relateras till det övergripande målet för gymnasieutbildningen att förbereda eleverna för fortsatt utbildning, snarare än att behandla mer direkta mål för kursen, är det möjligt att dessa förmågor inte är lika uppmärksammade bland eleverna. De förmågor som förekommer bedöms därmed förekomma naturligt i den observerade situationen i och med att eleverna inte är medvetna om vilka förmågorna är och därmed inte medvetet skulle kunna eftersträva att uppvisa dem.

5.2.9 Förväntningarna utifrån ramverken

De förväntningar som formulerades i kapitel 2.3 är baserade på min tolkning av de olika ramverken. Det kan därmed vara på sin plats att diskutera dessa var och ett för sig.

Induktivt/deduktivt

Förväntningarna formulerades här utifrån min förståelse för det som presenterats av Skolverket (u.å) och Hansson (2014). Det framkom inte tydligt i dessa källor att det fanns någon förväntning på fördelningen mellan induktiva och deduktiva och därmed formulerades det som att det endast förväntades att båda formerna skulle förekomma. Hade det funnits en förväntan på hur fördelningen skulle se ut är det möjligt att användning av det studerade spelet inte skulle leva upp till den förväntningen då det var relativt få induktiva resonemang som förekom.

Imitativt/kreativt

Förväntningen utifrån detta ramverk baserades främst på min förståelse för Lithner (2017). Denna förväntan om en betydande del kreativa resonemang går även att se i studierna av Sidenvall et al. (2015), Tranbeck (2010) och Jäder (2015) som alla centrerats kring förekomsten av kreativa resonemang. Vad som är en betydande andel av de observerade resonemangen är en något vag formulering som lämnar visst utrymme för tolkning. Jag har därför valt att utgå ifrån de resultat som presenterats av Jäder (2015) där en tiondel av alla resonemang var kreativa och låtit det avgöra gränsen. I denna studie var en dryg tredjedel av

resonemangen kreativa vilket därmed ses som en betydande andel, jämförd med Jäders (2015) resultat. Användningen av spelet lever därmed upp till den förväntning som formulerats för detta ramverk.

MOHC

Förväntan som formulerats utifrån detta ramverk baserades på min förståelse för Kjellström & Stålné (2011) avsikt att använda ramverket som bedömningsverktyg. Vid bedömning är min förståelse att man gärna ser att en uppgift kan bedömas på samtliga bedömningsnivåer, i detta fall komplexitetsnivåerna. Därmed blev formuleringen av förväntningen att samtliga komplexitetsnivåer skulle förekomma. Denna förväntning levde användningen av det studerade spelet upp till, även om de metasystematiska resonemangen var få. En alternativ formulering hade kunnat ställa förväntningar på fördelningen av resonemangen mellan de olika komplexitetsnivåerna. Beroende på hur den förväntade fördelningen skulle se ut är det möjligt att användningen av det studerade spelet inte skulle levt upp till det, exempelvis om fördelningen förväntats vara koncentrerad kring systematiska och metasystematiska resonemang. Eftersom det inte fanns några indikationer från Kjellström & Stålné (2011) att de förespråkade en specifik fördelning i undervisningssyfte och en sådan fördelning kan konstrueras fritt utifrån de förväntade målen med undervisningen gjordes valet att inte specificera en sådan i förväntningen för detta ramverk. Istället nöjde jag mig med att formulera förväntningar om att samtliga komplexitetsnivåer skulle förekomma.

Kombinerat ramverk för resonemang

Förväntningarna utifrån de kombinerade ramverket formulerade jag utifrån tanken att om målet är att eleverna ska bekanta sig med resonemang bör så många olika former av resonemang förekomma. Vad ”så många som möjligt” innebär är dock öppet för tolkning och därför är denna formulering av en förväntning en av de mest svårbedömda. Anledningen till att det spel som studerats inte bedömdes leva upp till denna förväntning var att det fanns ett mönster bland de former av resonemang som inte observerats. Dessa resonemang koncentrerade sig kring induktiva resonemang och metasystematiska resonemang, vilket sågs som att användning av spelet som studerats misslyckades att komma åt dessa former av resonemang. Hade det istället varit så att det inte fanns något tydligt mönster bland de former av resonemang som inte observerades i denna studie hade bedömningen gjorts att det troligen rört sig om ett slumpartat utfall. I det fallet hade användningen av spelet som studerats bedömts leva upp till de förväntningar som satts av detta ramverk.

Ingenjörsmässiga förmågor

Förväntningarna som utformades utifrån detta ramverk baserades på min förståelse för CDIO syllabus (2011b). Kravet som framgår kan dock ses som relativt lågt, endast en

ingenjörsmässig förmåga behöver förekomma för att användningen av det studerade spelet skulle leva upp till förväntningarna. Anledningen till att det sattes så lågt var på grund av att tanken är att de förmågor som presenteras i CDIO syllabus (2011b) ska utvecklas under en hel utbildning så kraven för ett enskilt arbetsmoment kan inte sättas allt för högt. Detta framgår även i studierna av Bankel et al (2003) och Bankel et al (2005) där det är hela utbildningsprogram som varit i fokus snarare än enskilda arbetsmoment. Såvida inte förväntningarna hade formulerats som att alla eller minst 14 av de ingenjörsmässiga förmågorna som denna studie fokuserats på hade användningen av det studerade spelet fortfarande levt upp till förväntningarna, så resultatet skulle inte blivit annorlunda.

5.2.10 Resultatet i förhållande till syftet

Syftet med denna studie har varit att undersöka hur resonemangsförmågan och ingenjörsmässiga förmågor visar sig när elever spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasiets matematikkurser och sedan utvärdera hur relevanta denna typ av spel är för användning i matematikundervisningen på gymnasiet.

Den första delen av syftet uppfylls av besvarandet av de två första frågeställningarna som formulerats för denna studie. Det visar på att resonemangsförmågan och ingenjörsmässiga förmågor visar sig i flera olika former när eleverna spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasiets matematikkurser, där några former tenderar att vara mer framträdande än andra.

Den andra delen av syftet som berör utvärdering av den beskrivna typen av spels relevans för användning i matematikundervisningen på gymnasiet. Detta syfte uppfylls delvis av besvarandet av den tredje frågeställningen. Anledningen till att jag endast säger att det uppfylls delvis är för att endast ett spel har studerats i denna studie och därmed är det endast det specifika spelet som har kunnat utvärderas. För att syftet skulle kunna uppnås helt skulle ett flertal andra spel med matematiskt innehåll från gymnasiets matematikkurser behöva studeras på liknande sätt. Det studerade spelet har utvärderats och bedömts vara relevant för användning i matematikundervisningen på gymnasiet, utifrån de tillämpade ramverken.

5.3 Metoddiskussion

Här nedan följer en diskussion av de metoder som används i denna studie. Bland annat diskuteras vilka felkällor som kan finnas och förslag på förbättringar.

5.3.1 Fallstudie

Den här studien har behandlats som en fallstudie om elevers resonemang vid spel av ett kortspel. I och med att det är en fallstudie och dataunderlaget är litet finns inga höga förväntningar på att resultatet ska vara generaliserbart. Ett exempel är att endast ett spel med matematiskt innehåll från gymnasiets matematikkurser, spelet XYZ, har använts i studien. Detta kan göra att resultatet är bundna till det specifika spelets struktur och gör att resultatet

inte kan förväntas vara representativt för spel med en annan struktur. Omfattningen av detta arbete, den tidsram som rådde samt bristen på liknande spel gjorde dock att studien begränsades till att studera ett spel.

Det kan vara värt att notera att de två grupperna som deltagit i studien har varit skilda och utan kontakt med varandra, vilket hade gjort det möjligt att dela upp denna studie i två fallstudier, en för varje grupp. Detta är av intresse då det är möjligt att se likheter mellan de två gruppernas resultat, främst kring den vanligaste formen av resonemang som var deduktivt imitativt formellt resonemang för båda grupperna. Detta kan indikera att det finns ett generaliserbart resultat men studiens utformning och omfattning gör att jag är restriktiv med att förespråka en sådan tolkning.

Avgränsningar har även gjorts i denna studie som innebär att studien endast fokuserar på Matematik 4 som kurs och endast Naturvetenskapsprogrammet och Teknikprogrammet som gymnasieprogram. Jag vill därmed yrka på stor försiktighet med att tolka studiens resultat som applicerbara för andra kurser och program.

För fallstudier finns det även krav på att den situation som observeras är naturligt förekommande, alltså att det inte krävts ingripande från undersökaren för att skapa den (Denscombe, 2010). Det är diskutabelt om denna studie uppfyller det kravet i och med att jag som undersökare var tvungen att designa de speltillfällena som legat till grund för studien.

5.3.2 Observation

Deltagarobservation sågs som den enda genomförbara observationsmetoden främst på grund av behovet att ha mig närvarande som specialist på spelet utifall frågor uppstod. Det behovet uppstod ett flertal gånger under arbetets gång och min bedömning är därför att deltagarobservation var det rätta valet, precis som Bjørndal & Nilsson (2005) påpekat. Det kan dock inte uteslutas att observationsmetoden påverkat eleverna. Bland annat sågs detta då eleverna under presentationstillfället ofta riktade sitt tal mot mig, snarare än till de andra eleverna. Även vetskapen att de blev observerade och vad det var observationen fokuserade på har troligen också påverkat elevernas agerande, det är dock svårt att säga i hur stor grad. Det är trots allt svårt att undkomma detta då det finns tydliga etiska krav på att informera de individer som blir observerade om dessa saker. Det gör att det är svårt att identifiera sätt att inte påverka eleverna och att den felkällan accepteras som ofrånkomlig i den här studien.

Valet att endast fokusera på elevernas resonemang under presentationsmomentet gör att resultatet kan ifrågasättas. Dels eftersom resonemanget som eleverna förde under presentationstillfället inte nödvändigtvis var det som de förde när de spelade spelet. Min bedömning här är att det egentligen inte spelar så stor roll, eftersom det intressanta är att studera det resonemang som eleven presenterar. Det spelar därmed ingen roll om eleven

presenterar ett resonemang som de fört när de spelade eller om de hittar på ett helt nytt resonemang bara för presentationstillfället, i båda fallen har eleverna konstruerat ett resonemang till följd av att ha spelat spelet och därmed är det intressant att studera det. Det krävs dock att presentationstillfället ses som en del av att spela spelet för att denna tolkning ska vara möjlig, något jag förutsatt under hela arbetet med denna studie.

Ett mer aktuellt område för kritik är enligt mig de resonemang som inte kommit med i studien. Det rör sig om de resonemang som eleverna fört men som inte framkommit under presentationstillfället i och med att eleverna under detta tillfälle endast presenterade ett urval av de resonemang de kan ha fört under hela speltillfället. För att åtgärda detta problem skulle det krävas att eleverna fick möjlighet att presentera samtliga av sina resonemang. Detta skulle kunna åstadkommas till exempel genom att begränsa spelandet till endast ett parti så att det parti som presenteras under presentationstillfället är det enda som spelats. Ett annat alternativ är att skapa förutsättningar för eleven att presentera samtliga av de partier som spelats eller att på något sätt få eleverna att framföra sina resonemang i realtid medan de spelar spelet. Detta skulle kunna göra att samtliga av de resonemang som eleverna för kommer med i datainsamlingen. I denna studie har dock endast de resonemang som eleverna självmant presenterat under presentationstillfället använts som dataunderlag i och med att det var dessa som presenterade sig naturligt utan ytterligare ingripande av undersökaren.

5.3.3 Transkribering

Som tidigare nämnts i metodavsnittet transkriberades endast det som identifierats som relevanta moment av inspelningen. Även om jag är relativt säker på att det material som inte transkriberats inte var av intresse för studien så kan det inte helt uteslutas att material av intresse har fallit bort i detta steg. Det bedömdes dock både då och nu att det hade blivit en allt för stor arbetsbelastning för mig att på egen hand transkribera inspelningarna och därmed fattades beslutet att efter flertalet genomlysningar identifiera de moment då elevernas resonemang framkom och endast transkribera det, i linje med de rekommendationerna som presenterats av Denscome (2010) och Bjørndal & Nilsson (2005).

Det ska också nämnas att eleverna främst använde sig av något informellt språk vilket gjorde att vissa transkriptioner blev svårförstådda när det talade innehållet återgavs ordagrant. I dessa tillfällen har inspelningen och även mitt minne av situationen varit något jag förlitat mig på för att förstå det eleven försökt förmedla. Det är dock högst troligt att en läsare som inte har tillgång till inspelningen och förstahandserfarenheten av situationen kommer att ha vissa svårigheter att förstå elevernas citat, som de är återgivna i denna rapport. Jag har tyvärr inte kunnat komma på något sätt att åtgärda detta problem och lämnar därmed till läsaren att använda sitt eget omdöme vid bedömning av trovärdigheten i min tolkning av elevernas citat.

5.3.4 Innehållsanalys

Ambitionen var att i den här studien tillämpa det som av Potter och Levine-Donnerstein (1999) lyfts fram som manifest innehållsanalys men det framgick sedan att det fanns ett behov av att ta in element av en latent innehållsanalys. Det ledde till att innehållsanalysen som används i denna studie byggts på de tolkningar som en person, jag som undersökare, har gjort.

Som ensam undersökare i genomförandet av innehållsanalysen i den här studien kan jag inte göra allt för stora påståenden kring reliabiliteten i kodningen. Detta hade eventuellt kunnat förbättras om en mer erfaren undersökare genomför innehållsanalysen eller om fler undersökare kunnat genomföra innehållsanalysen och diskuterat den för att säkerställa en likvärdig tolkning.

Det jag kan säga är att jag har försökt att inte vara allt för selektiv i vilka citat som jag valt för att demonstrera hur kodningen har gjorts. Med detta menar jag att jag inte bara har valt att presentera citat som var enkla att kategorisera och tydligt uppfyller de krav som ställts för de olika kategorierna, utan jag har även försökt att inkludera citat där kategoriseringen kan uppfattas som tveksam. Med detta hoppas jag att läsaren får en uppfattning om vilka brister det kan finnas i min kategorisering och kan ha de i åtanke vid sin värdering av min studie.

Den aspekt av innehållsanalysen som upplevts svårast var att bedöma om ett resonemang uppfyllde nyhetskravet för kreativa resonemang. Eftersom det inte alltid går att urskilja direkt ur ett uttalande om det är nytt eller inte för eleven är det mycket möjligt att missbedömningar gjorts med avseende på detta krav. Det skulle få som konsekvens att fördelningen mellan imitativa och kreativa resonemang inte är så som den presenterats i resultatet. Jag hade i efterhand gärna sett att det fanns en kategori för de resonemang som uppfyller de två andra kraven för kreativa resonemang men inte nyhetskravet. Detta eftersom det är väldigt många olika typer av resonemang som just nu hamnar i kategorin imitativa resonemang, trots att deras karaktär kan skilja sig åt väsentligt. Min tolkning av kraven för kreativa resonemang är att de två kraven om rimlighet och matematisk grund är kvalitetskrav som säkerställer att resonemanget håller en viss nivå, medan nyhetskravet är det som gör att det blir kreativt. Bland de imitativa resonemangen kan det därmed finnas både resonemang som håller den nivå som förväntas av kreativa resonemang och sådana som inte gör det. Det gör att det finns ett spektrum av möjliga kvalitetsnivåer bland de imitativa resonemangen, vilket enligt mig leder till att det blir svårt att avgöra hur ett imitativt resonemang ska värderas. Till skillnad från kreativa resonemang som enligt min förståelse av Lithner (2017) alltid ska värderas högt.

Ett alternativt hade varit att tillämpa det av Marying (2015) benämnt induktiv innehållsanalys, när kategorierna konstrueras utifrån materialet istället för att kategorierna formuleras på förhand. Detta skulle kunnat leda till att kategorierna bättre representerade min tolkning av data istället för att jag sorterat den utifrån kategorier som inte nödvändigtvis

varit anpassade för den typ av data jag studerat. Användningen av det av Marying (2015) benämnt strukturerad innehållsanalys gör det däremot lättare att jämföra resultatet med andra undersökningar. Jag bedömer det även som högst troligt att en induktiv innehållsanalys i stort ändå hade baserats på de kategorier som de presenterade ramverken lyft fram. Detta eftersom jag varit insatt i dessa kategoriers definitioner och därmed medvetet eller omedvetet skulle jämföra hur data förhöll sig till dessa.

5.4 Framtida forskning och rekommendationer

Här nedan följer några av mina tankar kring fortsatt forskning inom området samt rekommendationer för lärare som vill använda denna typ av spel i undervisningen.

5.4.1 Vidare forskning

Som nämnts i metoddiskussionen har denna studie endast fokuserat på ett spel med matematiskt innehåll från gymnasiets matematikkurser, spelet XYZ. Det skulle därmed vara lämpligt för framtida studier att undersöka andra spel av denna typ för att ge en mer representativ bild av hur resonemangsförmågan och ingenjörsmässiga förmågor visar sig när dessa spel spelas.

I den här studien har jag fokuserat på att undersöka om resonemangsförmågan visar sig när eleverna spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasiets matematikkurser och resultatet tyder på att så är fallet. En fortsatt studie skulle kunna studera huruvida elevernas resonemangsförmåga utvecklas när de spelar denna typ av spel, eller om det endast kan ses som ett sätt att visa den befintlig nivå av resonemangsförmågan.

Det som även gått att se i resultatet från den här studien var att de kreativa resonemangen blev allt färre allt eftersom eleverna spelade spelet fler gånger. Jag spekulerar i att det skulle kunna uppstå en ny cykel med en period av kreativa resonemang när eleverna reviderar sina strategier. Det skulle vara intressant att se om detta stämmer eller om det går att initiera en ny period av kreativa resonemang genom att förändra spelets struktur eller förutsättningar, något som bör vara möjligt att göra givet det spelet som studerats modulära karaktär. Om så är fallet skulle användningen av denna typ av spel vara relevant över en längre tidsperiod med avseende på användningen av kreativa resonemang.

Jag har även i den här studien varit noga med att inte ge eleverna råd om hur de ska tänka när de spelar spelet. Det kan därmed vara av intresse att i en fortsatt studie se på hur situationen förändras om det finns någon som ger eleverna råd om vad de kan tänka på när de spelar spelet. Detta skulle eventuellt kunna ge en bättre bild av hur situationen ser ut när läraren har en aktiv roll i att stödja elevernas utveckling, till skillnad från den passiva roll jag antagit i den här studien. Jag spekulerar i att en mer aktiv roll från lärarens sida bland annat kan minska mängden kreativa resonemang i och med att eleverna då får ta del av lärarens resonemang.

5.4.2 Rekommendationer för lärare

Till att börja med, i och med att inga bevis ännu finns för att den typ av spel som studerats i denna studie förbättrar elevernas matematiska förmågor så rekommenderar jag i nuläget att detta spel endast används som ett komplement till ordinarie undervisning.

Vidare visar studien att deduktiva resonemang framkommer när spelet spelas. Därmed rekommenderar jag spelet i sin nuvarande version om det är denna form av resonemang som är av intresse. Om det snarare är induktiva resonemang som är eftertraktade är min rekommendation att inte använda det spel som studerats i denna studie. Detta eftersom studiens resultat tyder på att induktiva resonemang inte förekommer i så stor utsträckning när detta spel används.

Eftersom förekomsten av kreativa resonemang är beroende av hur mycket information eleverna fått på förhand är det något att ha i åtanke. Om målet är att främja kreativa resonemang kan det krävas att läraren antar en liknande passiv roll som jag antagit i denna studie. Min rekommendation är dock att läraren antar en något mer aktiv roll för att stödja eleverna, inspirera dem och ge dem exempel på hur de kan tänka kring olika aspekter av spelet. Om en mer aktiv roll inte tas från början, för att främja kreativa resonemang, så är mina rekommendationer att en mer aktiv roll tas när de kreativa resonemangen blivit färre.

Studiens resultat har belyst svagheter vid användning av det studerade spelet, främst vad gällande induktiva resonemang och metasystematiska resonemang samt kreativa resonemang över en längre tidsperiod. Styrkor har dock även kunnat identifieras, där ibland den relativt stora andelen kreativa resonemang under de första tillfällena samt den höga förekomsten av deduktiva resonemang och formella resonemang. Det är min förhoppning att lärare utifrån dessa resultat ska kunna avgöra om och hur det är lämpligt att använda det spel som studerats i denna studie i deras undervisning.

6 Slutsats

Även om det finns aspekter som begränsar denna studies möjliga generaliserbarhet och reliabilitet visar resultatet på att resonemangsförmågan och ingenjörsmässiga förmågor visar sig när elever spelar spel med matematiskt innehåll från gymnasiets matematikkurser. Mer specifikt har denna studie visat på att när det spel som studerats använts har bland annat kreativa resonemang förekommit i en större utsträckning än i de arbetsformer som några tidigare studier behandlat. Studien har även visat på möjlighet att studera resonemang utifrån två andra ramverk utöver ramverket som Lithner (2008) introducerat och dessa ramverk kan kombineras och användas samtidigt för att ge en mer komplex bild av resonemang. Studien visar vidare att ett flertal ingenjörsmässiga förmågor visas av eleverna när de spelar det

studerade spelet, något som i denna studie tolkats som en indikation på relevansen för användning av spelet vad gällande ingenjörsmässighet. Utifrån dessa resultat har utvärderingen gjorts att det spel som studerats har relevans för användning inom matematikundervisningen på gymnasiet, med avseende på ett flertal aspekter av resonemangsförmågan och för de gymnasieprogram som riktar sig till blivande ingenjörstudenter.

Referenser

- Afari, E., Aldridge, J., & Fraser, M. (2012). Effectiveness of using games in tertiary-level mathematics classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), 1369-1392. doi: 10.1007/s10763-012-9340-5
- Anderson, K., Courter, S., Mcglamery, T., Nathans-Kelly, T., & Nicometo, C. (2010). Understanding engineering work and identity: A cross-case analysis of engineers within six firms. *Engineering Studies*, 2(3), 153-174. doi: 10.1080/19378629.2010.519772
- Baker, M., Beltran, J., Buell, J., Conrey, B., Davis, T., Donaldson, B., ... Wong, J., (2013). Sets, Planets, and Comets. *College Mathematics Journal*, 44(4), 258-264. doi: 10.4169/college.math.j.44.4.258
- Bankel, J., Berggren, K., Blom, K., Crawley, E., Wiklund, I., & Östlund, S. (2003). The CDIO syllabus: A comparative study of expected student proficiency. *European Journal of Engineering Education*, 28(3), 297-315. doi: 10.1080/0304379031000098274
- Bankel, J., Berggren, K., Engstrom, M., Wiklund, I., Crawley, E.F., Soderholm, D.H., ... Östlund, S. (2005). Benchmarking Engineering Curricula with the CDIO Syllabus. *The International Journal of Engineering Education*, 21(1), 121-133.
- Barclay, S., Jeffres, M., Meghan N., & Bhakta, Ragini. (2011). Educational card games to teach pharmacotherapeutics in an advanced pharmacy practice experience. (Instructional design and assessment). *American Journal of Pharmaceutical Education*, 75(2), 33.
- Berggren, K., Brodeur, D., Crawley, E., Ingemarsson, I., Litant, W., Malmqvist, J. & Östlund, S. (2003). CDIO: An International Initiative for Reforming Engineering Education. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 2(1), 49-52.
- Bjørndal, C. & Nilsson, B. (2005). *Det värderande ögat: Observation, utvärdering och utveckling i undervisning och handledning*. Stockholm: Liber.
- Brunström, M. (2015). *Matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiska matematikprogram*. (Doktorsavhandling, Karlstad universitet, Karlstad). Hämtad från urn:nbn:se:kau:diva-35037
- Charoenying, T. (2010). Accountable Game Design: Structuring the Dynamics of Student Learning Interactions. *Journal of Educational Computing Research*, 43(2), 135-163. doi: 10.2190/EC.43.2.a
- Chen P., Kuo R., Chang M., Heh JS. (2009) Designing a Trading Card Game as Educational Reward System to Improve Students' Learning Motivations. I Pan, Z., Cheok, A. D., Müller, W., Chang M. (Red.) *Transactions on Edutainment III* (Vol. 5940, Lecture Notes in Computer Science). (s. 116-128). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. doi: https://doi-org.focus.lib.kth.se/10.1007/978-3-642-11245-4_11
- Conceive Design Implement Operate, (2011a). *Svensk översättning av CDIO Syllabus 2.0: (Version 1.0)*, Hämtad 10 februari, 2019, från Conceive Design Implement Operate, http://cdio.org/files/syllabus/CDIO_Syllabus_Sve_Ver_1_0.pdf
- Conceive Design Implement Operate, (2011b). *CDIO Syllabus 2.0*. Hämtad 10 februari, 2019, från Conceive Design Implement Operate, <http://cdio.org/benefits-cdio/cdio-syllabus/cdio-syllabus-topical-form>

- Datainspektionen, (u.å.). Dataskyddsförordningens grundläggande principer, Hämtad 2 oktober, 2019, från <https://www.datainspektionen.se/lagar--regler/dataskyddsförordningen/grundlaggande-principer/>
- Denscombe, M. (2010) *The Good Research Guide: For small-scale social research projects*, Maidenhead: Open University Press.
- Galarza, P. (2017). Designing and Testing a Mathematics Card Game for Teaching and Learning Elementary Group Theory. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 8(2), 9-18. doi: 2156-1400
- Goldberg, T. (2016). Algebra From Geometry in the Card Game SET. *The College Mathematics Journal*, 47(4), 265-273. doi: 10.4169/college.math.j.47.4.265
- Hansson, Ö (2014), *Resonemangsförmåga*. Hämtad 18 januari, 2019, från Skolverket, https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/path/larportalen/material/inriktningar/1-matematik/Gymnasieskola/441_undervisamatematikutifranformagorna%20GY/5_resonemangsforma/materiel/flikmeny/tabA/Artiklar/FmGy_05A_01_resonemang%20LA.docx
- Hsieh, H., & Shannon, S. (2005). Three Approaches to Qualitative Content Analysis. *Qualitative Health Research*, 15(9), 1277-1288. doi: 10.1177/1049732305276687
- Husain, L. (2011). *Getting Serious about Math: Serious Game Design Framework & an Example of a Math Educational Game*. (Examensarbete, Lunds universitet, Lund) Hämtad från <http://lup.lub.lu.se/student-papers/record/1983685>
- Juter, K. (2014), *De matematiska förmågorna*, Hämtad 18 maj 2019, från Skolverket, https://larportalen.skolverket.se/#/modul/1-matematik/Gymnasieskola/441_undervisamatematikutifranformagorna%20GY/1_attarbetameddematematiskaformagorna/
- Jäder, J. (2015). *Elevers möjligheter till lärande av matematiska resonemang* (Licentiatavhandling, Linköpings universitet, Linköping). Hämtad från urn:nbn:se:liu:diva-118094
- Kramarski, B., & Mevarech, Z. (2003). Enhancing Mathematical Reasoning in the Classroom: The Effects of Cooperative Learning and Metacognitive Training. *American Educational Research Journal*, 40(1), 281-310. doi: 10.3102/00028312040001281
- Landers, R. (2014). Developing a Theory of Gamified Learning: Linking Serious Games and Gamification of Learning. *Simulation & Gaming*, 45(6), 752-768. doi: 10.1177/1046878114563660
- Liljekvist, Y. (2014). *Lärande i matematik: Om resonemang och matematikuppgifters egenskaper* (Doktorsavhandling, Karlstads universitet, Karlstad). Hämtad från urn:nbn:se:kau:diva-31456
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning, *Educational Studies in Mathematics*, 67:255–276, doi: 10.1007/s10649-007-9104-2
- Lithner, J. (2011) University Mathematics Students' Learning Difficulties, *Education Inquiry*, 2:2, 289-303, doi: 10.3402/edui.v2i2.21981
- Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning, *ZDM Mathematics Education*, 49:937–949, doi: 10.1007/s11858-017-0867-3

- Mayring, S. (2015) Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures i Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C. & Presmeg, N. (Red.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of Methodology and Methods* (s. 365-380) New York: Springer.
- Mevarech, Z., & Kramarski, B. (2003). The effects of metacognitive training versus worked-out examples on students' mathematical reasoning. *British Journal of Educational Psychology*, 73(4), 449-471. doi: 10.1348/000709903322591181
- Michael Lampert Commons (2008) Introduction to the Model of Hierarchical Complexity and Its Relationship to Postformal Action, *World Futures*, 64(5-7), 305-320, doi: 10.1080/02604020802301105
- Naps, T., Rößling, G., Almstrum, V., Dann, W., Fleischer, R., Hundhausen, C., . . . Velázquez-Iturbide, J. (2003). Exploring the role of visualization and engagement in computer science education. *ACM SIGCSE Bulletin*, 35(2), 131-152. Doi: 10.1145/782941.782998
- Potter, W., & Levine-Donnerstein, D. (1999). Rethinking validity and reliability in content analysis. *Journal of Applied Communication Research*, 27(3), 258-284. doi: 10.1080/00909889909365539
- Samuelson, A. (2018). Card Games and Chemistry Teaching Organometallic Reactions Through Card Games. *Resonance*, 23(8), 915-923. doi: 10.1007/s12045-018-0693-0
- Sidenvall, J., Lithner, J., & Jäder, J. (2015) Students' reasoning in mathematics textbook task-solving, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(4), 533-552, doi: 10.1080/0020739X.2014.992986
- Skolverket (2011), *Läroplan för gymnasieskolan 2011, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen*, Stockholm: Skolverket.
- Skolverket (u.å), *Kommentarmaterial till ämnesplanen i matematik i gymnasieskolan* Hämtad 1 februari, 2019, från Skolverket, https://www.skolverket.se/download/18.6011fe501629fd150a2893a/1530187438471/Kommentarmaterial_gymnasieskolan_matematik.pdf
- Sundin, B. (2006). *Den kupade handen: Historien om människan och tekniken*, Stockholm: Carlsson Bokförlag.
- Sundell, S. (2018). *Trenden: Därför spelar vi mer och mer brädspel*. Hämtad 19 april, 2019, från Sveriges Television, <https://www.svt.se/kultur/trenden-darfor-spelar-vi-mer-och-mer-bradspel>
- Tong, L., Yang, J., Han, X., & Velasquez, L. (2014). The card game 24 and its application to math education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(4), 1-9. doi: 10.1080/0020739X.2013.868544
- Tranbeck, M. (2010). *Kreativt matematiskt grundat resonemang: - förekommer det i lärargenomgångar på gymnasienivå, och i så fall, på vilket sätt?* (Examensarbete, Umeå universitet, Umeå). Hämtad från urn:nbn:se:umu:diva-35560
- Turkay, S., Adinolf, S., & Tirthali, D. (2012). Collectible Card Games as Learning Tools. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 46(C), 3701-3705. doi: 10.1016/j.sbspro.2012.06.130

United Nations Development Programme. (u.å), *4 God utbildning för alla: 4.A Skapa inkluderande och trygga utbildningsmiljöer*, Hämtad 30 april, 2019, från United Nations Development Programme, <https://www.globalamalen.se/om-globala-malen/mal-4-god-utbildning-alla/>

Universitet- och högskolerådet. (2013). *Områdesbehörigheter för Gy11 och Vux12*, Hämtad 16 april, 2019, från Antagning, <https://antagning.se/globalassets/regelverk-och-anmalningskatalog/omradesbehorigheter-for-gy11--vux12-ny4.pdf>

Uppsala universitet. (2005). Definition av ingenjörsmässighet. Hämtad 2019-09-26 från https://www.teknat.uu.se/digitalAssets/64/a_64129-f_Ingenj__rsm__ssighet.pdf

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed*. Stockholm: Vetenskapsrådet

Woollacott, L. (2009). Validating the CDIO syllabus for engineering education using the taxonomy of engineering competencies. *European Journal of Engineering Education*, 34(6), 545-559. doi: 10.1080/03043790903154465

Bilagor

Bilaga 1, Spelregler

Regler

Material:

Z-kortlek (gemensam), 20 st Z-kort

Y-kortlek (individuell), 25 st Y-kort vardera.

X-kortlek (gemensam), 20 st X-kort

Tärningar eller annat verktyg för att generera slumpstal

Miniräknare eller dator för beräkningar

Antal spelare: 2

Spelets mål

Under spelets gång fattar spelarna beslut kring vilka av de tillgängliga Z-, Y-, och X-kort de vill spela. Dessa val leder i slutändan till att ett z-värde kan beräknas och den spelare som har det högsta z-värdet vinner partiet. Spelet fortsätter sedan på samma sätt tills en spelare lyckats vinna två partier.

Förklaring av termer

X-kortlek: X-kortleken består av X-kort med olika intervall, exempelvis;

$$x \in [-10, -6]$$

$$x \in [-3, 3]$$

$$x \in [0, 5]$$

Y-kortlek: Y-kortleken består av Y-kort med funktioner av x , exempelvis;

$$y = 2x - 73$$

$$y = 60 \sin\left(\frac{7\pi}{8}x + 4.8\right) - 35$$

$$y = 20 \cos(x) - 8x$$

Z-kortlek: Z-kortleken består utav Z-kort med funktioner av y & x , exempelvis;

$$z = \begin{cases} 2y, & y > 60 \\ 2.1y, & -60 \leq y \leq 60 \\ -1.7y, & y < -60 \end{cases}$$

$$z = \frac{y}{5} - x$$

$$z = -y$$

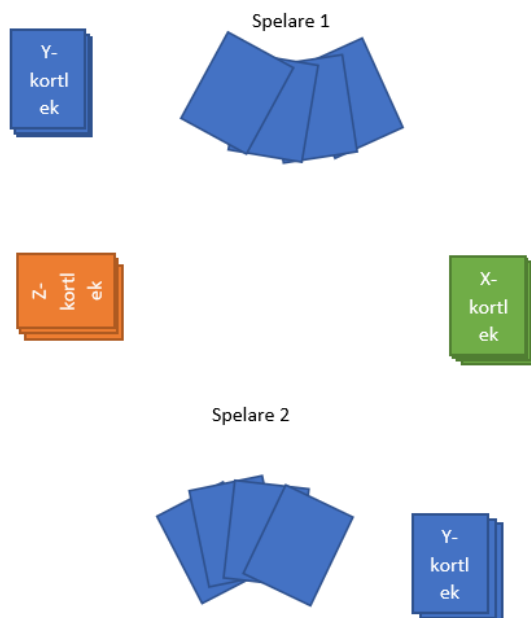
Parti: Stegen 3-14 i spelets gång utgör ett parti. En match består vanligtvis av 2-3 partier men kan utökas till fler om något av partierna blir oavgjort.

Match: En match består utav 2 eller fler partier och pågår tills en spelare har vunnit 2 partier.

Spelets gång:

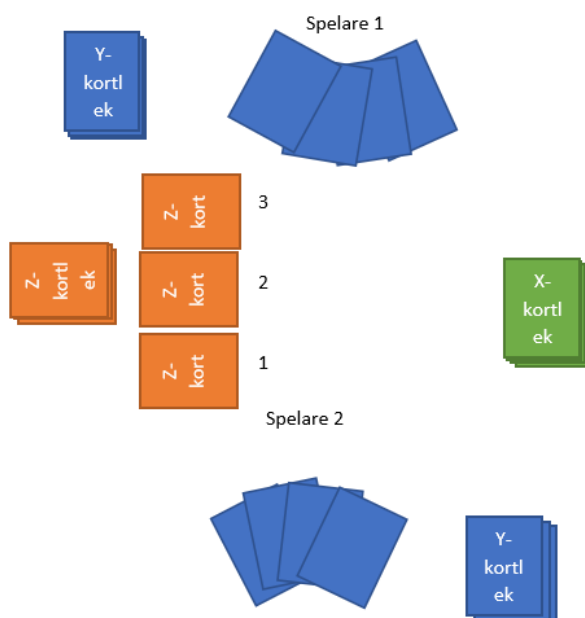
1. Spelet börjar med att varje spelare blandar sin Y-kortlek och sedan varsin av de två andra kortlekarna.
2. Kortlekarna placeras ut på spelplanen och varje spelare drar sedan 4 kort var från sin Y-kortlek. (Bild 1)

Bild 1: Spelets början



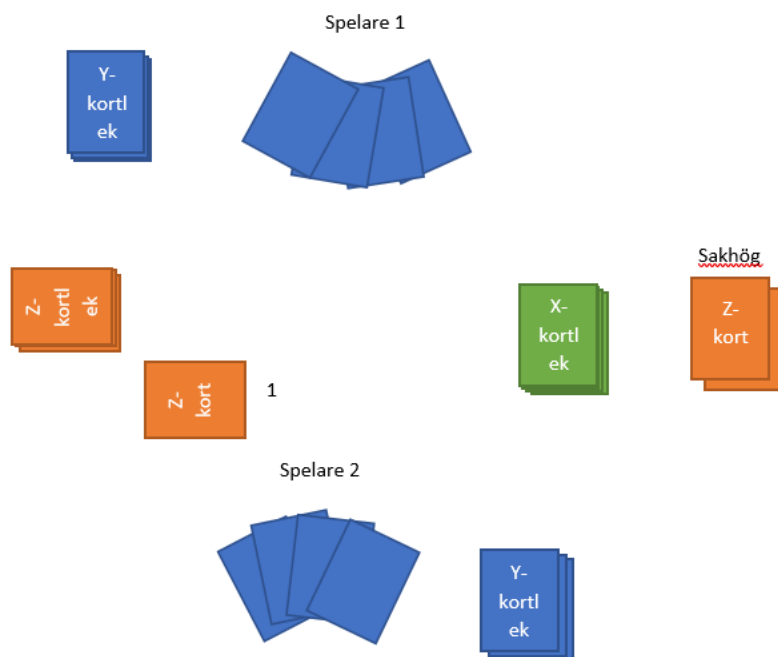
3. Efter det dras de 3 översta kortet från Z-kortleken och placeras mellan spelarna så att båda kan se dessa tydligt. (Bild 2)

Bild 2, upplägg av Z-kort



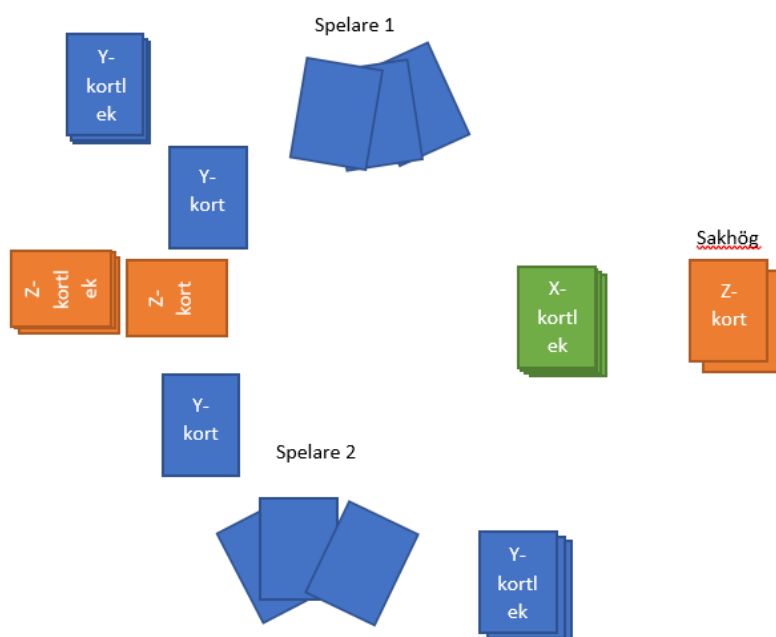
4. Spelarna bestämmer sig för vilket av de uppvända Z-korten som de vill ha och visar att de har bestämt sig genom att lägga ner sin hand med baksidan upp på spelplanen framför dem.
5. När spelarna har signalerat att de har bestämt sig visar spelarna samtidigt vilket Z-kort de vill använda.
 - Om spelarna har valt samma kort används det och resterande placeras i sakhögen.
 - Om spelarna inte valt samma kort används det tredje Z-kortet som ingen av spelarna valt och de två andra Z-korten placeras i sakhögen.

Bild 3, Z-kort 1 valdes, Z-kort 2 & 3 läggs i sakhögen



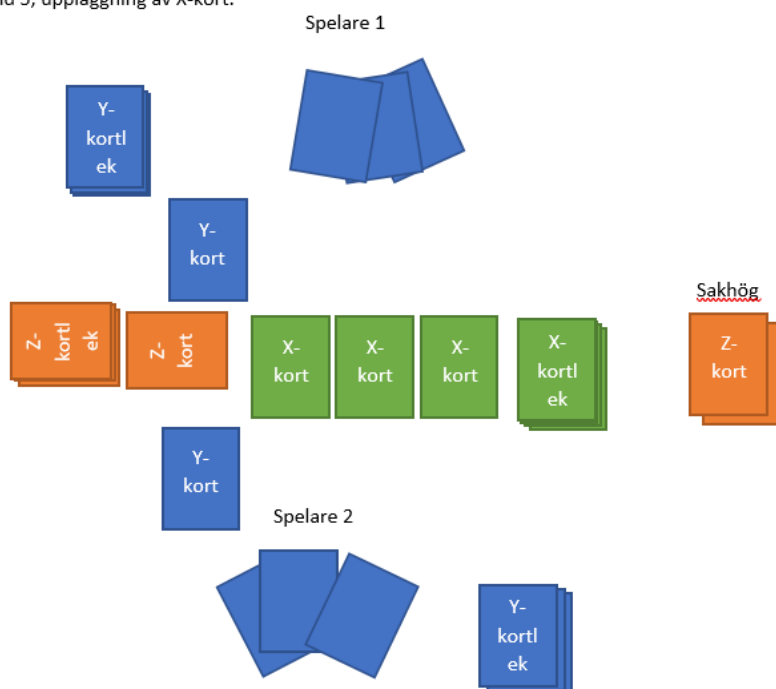
6. Varje spelare väljer nu vilket av sina Y-kort de vill använda från sin hand och lägger fram det på spelplanen framför sig och placerar sedan sin hand över X-kortleken. (Bild 4)

Bild 4, Val av Y-kort från handen



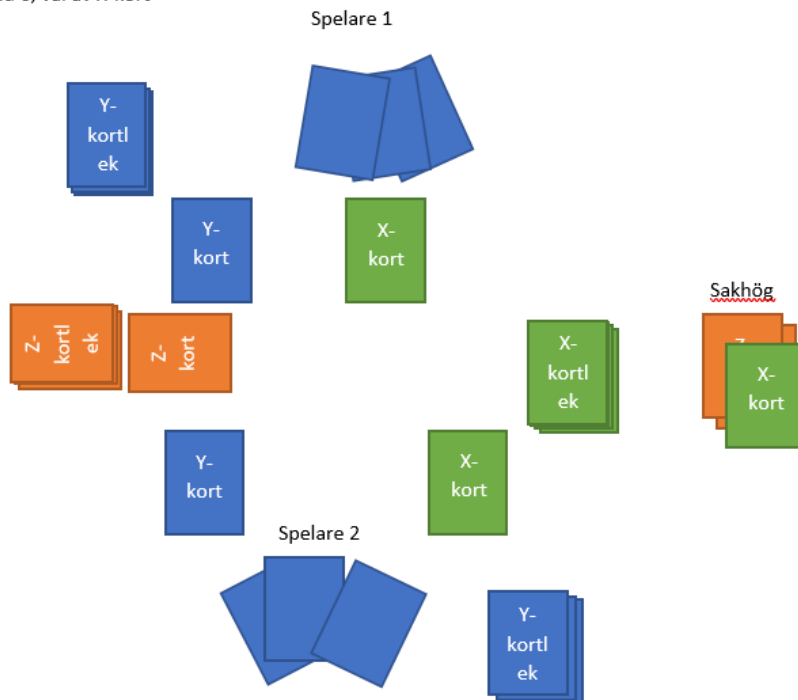
7. När båda spelarna valt sina Y-kort vänder den spelare som först placerade sin hand på X-kortleken upp de tre översta X-korten och placerar dessa mellan spelarna. (Bild 5)

Bild 5, uppläggning av X-kort.



8. Den spelare som först placerat sin hand på X-kortleken får nu välja ett av de tre uppvända X-korten och sedan får den andra spelaren välja ett utav de kvarvarande två X-korten. Det X-kort som inte valts placeras i sakhögen. (Bild 6)

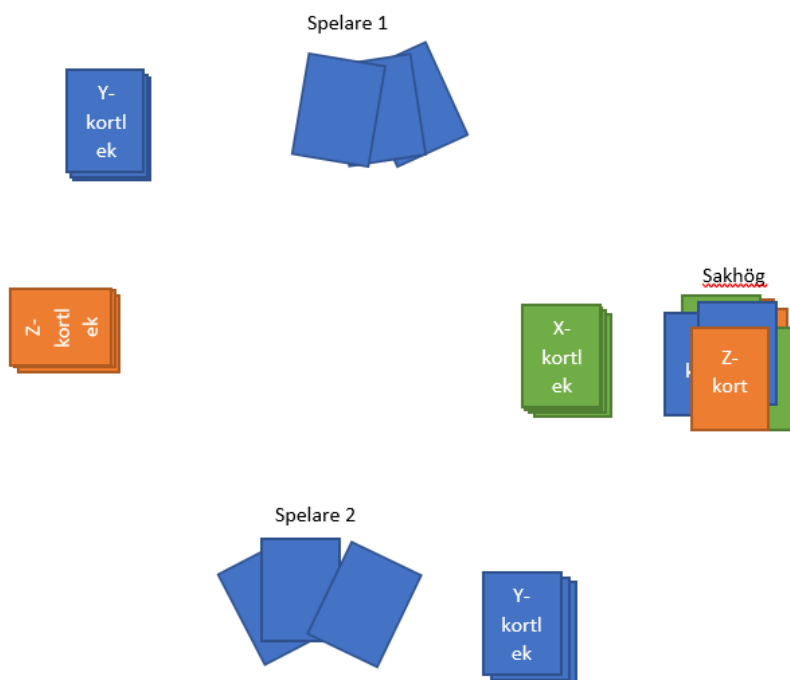
Bild 6, val av X-kort



9. Varje spelare slumpar sedan ett tal i det intervall som står på deras valda X-kort (se "Hur x slumpas" för regler och exempel för hur detta går till). Detta blir deras x-värde.
10. x-värdet används sedan för att beräkna y-värdet enligt den funktion som angetts på spelarens Y-kort.
11. y-värdet används för att beräkna z-värdet enligt den funktion som angetts på Z-kortet.
12. Spelaren med det hösta z-värdet vinner omgången.
I det fallet att spelarna fått samma z-värde är resultatet oavgjort och ingen spelare ses som vinnaren.

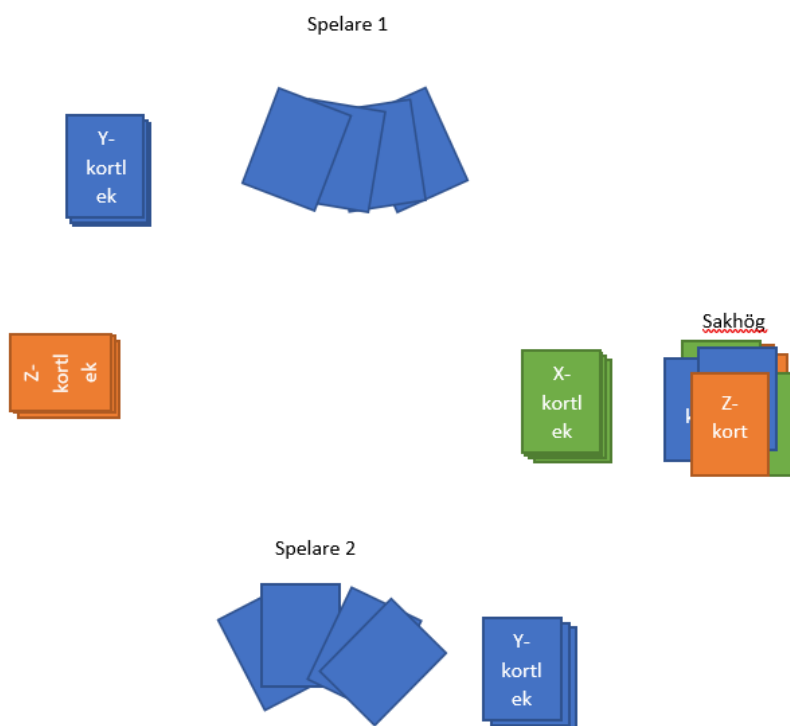
13. Samtliga kvarvarande uppvända X-kort, spelade Y-kort och Z-kortet läggs i sakhögen. (Bild 7)

Bild 7, Alla spelade kort placeras i sakhögen.



14. Varje spelare drar ett kort från sin Y-kortlek (Bild 8) och sedan upprepas stegen 3-14 tills en spelare vunnit 2 st partier.

Bild 8, Båda spelarna drar 1 nytt Y-kort.



Hur x slumpas

För att slumpa ett x -värdet i det givna intervallet som står på X-kortet gäller följande:

Givet att $x \in [a, b]$

Välj en metod att generera ett slumptal, s_t

s_t slumpas då i utfallsrummet $[c, d]$, där c är det lägsta talet som kan genereras av slumpmetoden och d är det största talet som kan genereras av slumpmetoden.

För att omvandla slumptalet s_t till ett x -värde används

$x = f(s_t)$, där $f(s_t)$ är en surjektiv funktion sådan att:

$f(s_t): [c, d] \rightarrow [a, b]$

Exempel 1, 6-sidig tärning som slumpgenerator.

Givet att $x \in [a, b]$

Slumpmetod: 6-sidig tärning

Utfallsrum: $s_t \in [1, 6]$

Antag att $f(s_t) = k * s_t + m$

Då kan vi sätta $\begin{cases} f(1) = a \\ f(6) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k + m = a \\ k * 6 + m = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{b-a}{5} \\ m = \frac{6a-b}{5} \end{cases} \Rightarrow f(s_t) = \frac{b-a}{5} s_t + \frac{6a-b}{5}$

Slumpfunktion: $f(s_t) = \frac{b-a}{5} s_t + \frac{6a-b}{5}$

Exempel 2, Miniräknaren som slumpgenerator 1

Givet att $x \in [a, b]$

Slumpmetod: Miniräknarens slumpfunktion, `slumpHel(a, b, 1)` eller `randInt(a, b, 1)`

Utfallsrum: $s_t \in [a, b]$

I detta fall är utfallsrummet det samma som intervallet för x så vi får;

Slumpfunktion: $f(s_t) = s_t$

Exempel 3, Miniräknaren som slumpgenerator 2

Givet att $x \in [a, b]$

Slumpmetod: Miniräknarens slumpfunktion, `slumpHel(0, 100, 1)` eller `randInt(0, 100, 1)`

Utfallsrum: $s_t \in [0, 100]$

Antag att $f(s_t) = k * s_t + m$

Då kan vi sätta $\begin{cases} f(0) = a \\ f(100) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = a \\ k * 100 + m = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{b-a}{100} \\ m = a \end{cases} \Rightarrow f(s_t) = \frac{b-a}{100} s_t + a$

Slumpfunktion: $f(s_t) = \frac{b-a}{100} s_t + a$

Om X- eller Z-kortleken tar slut

Om det tar slut på kort i X-kortleken så samlas X-korten från sakhögen ihop och blandas om till en ny X-kortlek.

Samma princip gäller om Z-kortleken tar slut.

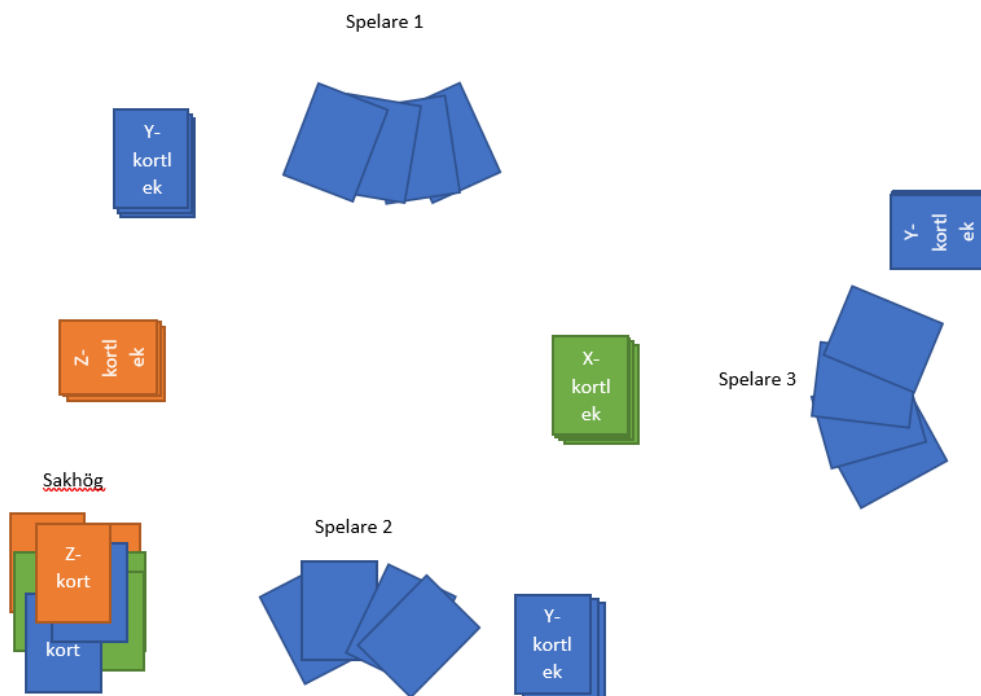
För 3 spelare

Spelet går även att spela med 3 spelare. Skilnaden blir i hur Z-kortet väljs och hur många X-kort som vänds upp, samt spelplanens utseende (bild 9)

För att välja Z-kortet räcker det nu att 2 spelare vill spela med samma Z-kort för att det ska väljas. Om alla spelare vill spela med olika Z-kort läggs alla de uppvända Z-korten i sakhögen och nästa kort i Z-kortleken vänds upp och spelet fortsätter med det Z-kortet som det valda.

När X-korten vänds upp vänds nu 4 st upp istället för 3. Valen av X-kort sker i den ordning som spelarna la sina händer på X-kortleken.

Bild 9. Spelplanen för 3 spelare



Spelreglerna i miniformat

Spelets gång



Bilaga 2, Kortdesign

x_1 $x \in [-10, -6]$ $[9, -10] \ni x$ $1x$	x_2 $x \in [-6, -2]$ $[2, -6] \ni x$ $2x$	x_3 $x \in [-2, 2]$ $[2, -2] \ni x$ $3x$
x_4 $x \in [2, 6]$ $[2, 6] \ni x$ $4x$	x_5 $x \in [6, 10]$ $[10, 6] \ni x$ $5x$	x_6 $x \in [-9, -3]$ $[3, -9] \ni x$ $6x$
x_7 $x \in [-3, 3]$ $[3, -3] \ni x$ $7x$	x_8 $x \in [3, 9]$ $[9, 3] \ni x$ $8x$	x_9 $x \in [-10, -7]$ $[7, -10] \ni x$ $9x$

x_{10} $x \in [-4, 0]$ $[0, 4] \ni x$ x_{10}	x_{11} $x \in [0, 5]$ $[5, 0] \ni x$ x_{11}	x_{12} $x \in [7, 10]$ $[0, 7] \ni x$ x_{12}
x_{13} $x \in [-8, -1]$ $x \in [-8, -1]$ x_{13}	x_{14} $x \in [-1, 4]$ $x \in [-1, 4]$ x_{14}	x_{15} $x \in [4, 8]$ $x \in [4, 8]$ x_{15}
x_{16} $x \in [-10, -8]$ $x \in [-10, -8]$ x_{16}	x_{17} $x \in [-6, -4]$ $x \in [-6, -4]$ x_{17}	x_{18} $x \in [-3, 4]$ $x \in [-3, 4]$ x_{18}

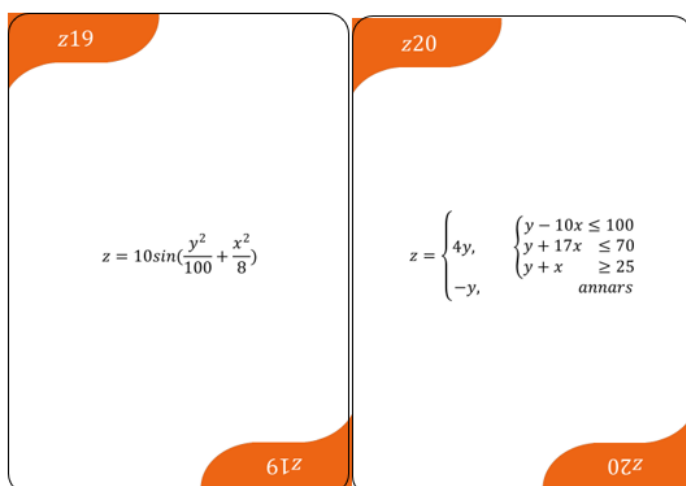
x_{19} $x \in [5, 7]$ $x \in [5, 7]$ x_{19}	x_{20} $x \in [8, 10]$ $x \in [8, 10]$ x_{20}	y_1 $y = -8x - 15$ $y = -8x - 15$ y_1
y_2 $y = 4x + 40$ $y = 4x + 40$ y_2	y_3 $y = 2x - 73$ $y = 2x - 73$ y_3	y_4 $y = 1.2x^2 - 6x - 85$ $y = 1.2x^2 - 6x - 85$ y_4
y_5 $y = 3x + 78 - 1.4x^2$ $y = 3x + 78 - 1.4x^2$ y_5	y_6 $y = 0.2x^2 + 3x - 68$ $y = 0.2x^2 + 3x - 68$ y_6	y_7 $y = 67 - 2 * 3.6^{0.34x}$ $y = 67 - 2 * 3.6^{0.34x}$ y_7

y8 $y = 4 * 0.75^x - 23$ $y = 4 * 0.75^x - 23$ y8	y9 $y = 2 - 5 * 0.83^x$ $y = 2 - 5 * 0.83^x$ y9	y10 $y = 34 \ln(10.1 + x) - 20$ $y = 34 \ln(10.1 + x) - 20$ y10
y11 $y = 45 \ln(10.5 - x) - 60$ $y = 45 \ln(10.5 - x) - 60$ y11	y12 $y = \tan(0.153x) + 27 + 2.5x$ $y = \tan(0.153x) + 27 + 2.5x$ y12	y13 $y = -3 \tan(0.151x) - 45$ $y = -3 \tan(0.151x) - 45$ y13
y14 $y = 60 \sin\left(\frac{7\pi}{8}x + 4.8\right) - 35$ $y = 60 \sin\left(\frac{7\pi}{8}x + 4.8\right) - 35$ y14	y15 $y = 80 \sin\left(\frac{2}{5}x + 4.4\right) + 15$ $y = 80 \sin\left(\frac{2}{5}x + 4.4\right) + 15$ y15	y16 $y = 30 \cos\left(\frac{\pi}{10}x + 30\right) + 70$ $y = 30 \cos\left(\frac{\pi}{10}x + 30\right) + 70$ y16

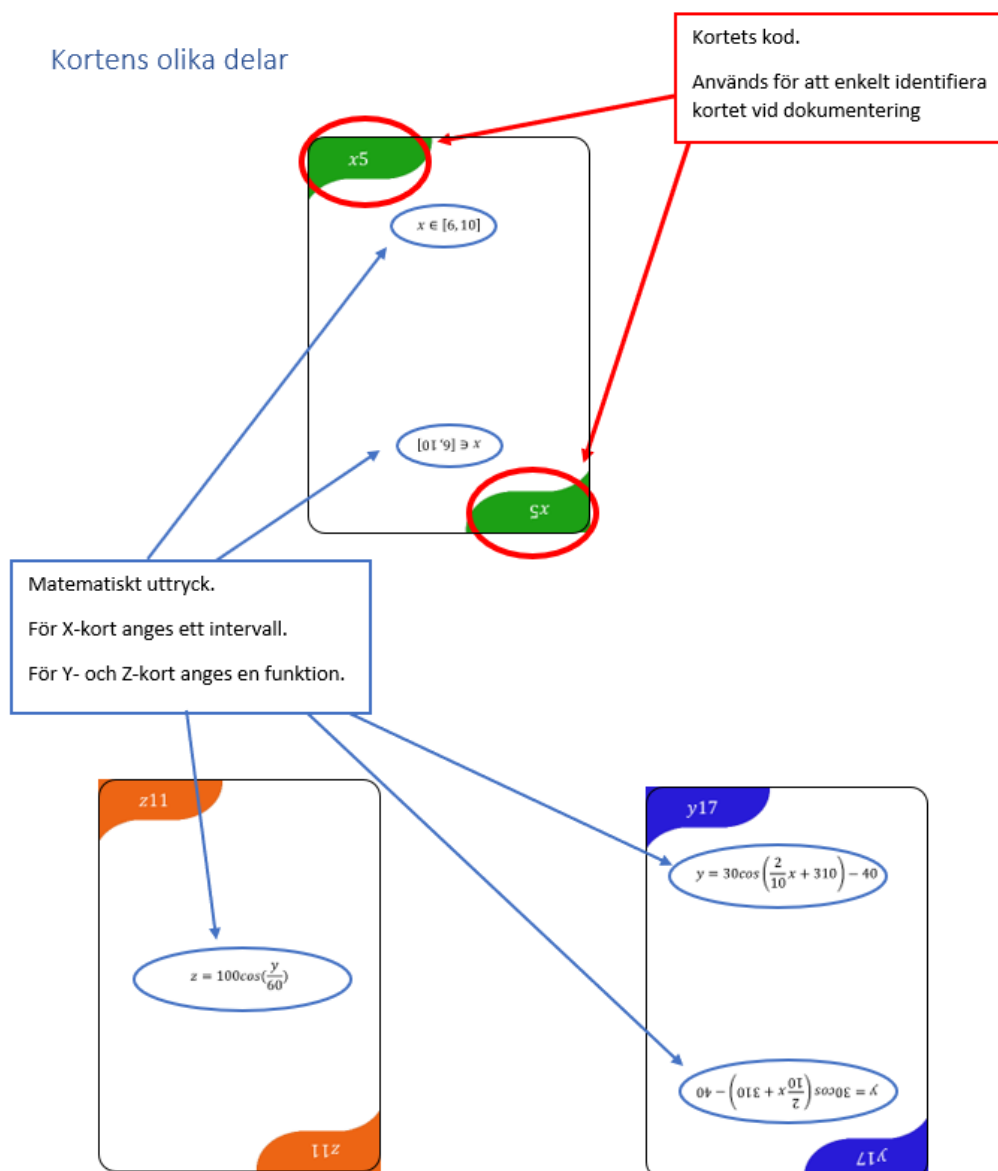
y17 $y = 30 \cos\left(\frac{2}{10}x + 310\right) - 40$ $y = -40 + 30 \cos\left(\frac{2}{10}x + 310\right)$ y17	y18 $y = 150 \sin\left(\frac{\pi}{7}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}x\right) + 18$ $y = 18 + 150 \sin\left(\frac{\pi}{7}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}x\right)$ y18	y19 $y = 180 \cos^2\left(\frac{2\pi}{18}x\right) - 90$ $y = -90 + 180 \cos^2\left(\frac{2\pi}{18}x\right)$ y19
y20 $y = 10x \sin\left(\frac{5}{2}x\right) + 14$ $y = 14 + 10x \sin\left(\frac{5}{2}x\right)$ y20	y21 $y = 20 \cos(x) - 8x$ $y = -8x + 20 \cos(x)$ y21	y22 $y = \frac{1}{x-12} - 0.05x^3 + x^2$ $y = \frac{1}{x-12} - 0.05x^3 + x^2$ y22
y23 $y = -(0.24x)^4 \sin(4x) - 7x$ $y = -7x - (0.24x)^4 \sin(4x)$ y23	y24 $y = (0.28(x+4))^3 \cos(4x) + 3x$ $y = 3x + (0.28(x+4))^3 \cos(4x)$ y24	y25 $y = 23(\sin(x) + \sin(2x))$ $y = 23(\sin(x) + \sin(2x))$ y25

$z = \begin{cases} \frac{1}{y'}, & y' \neq 0 \\ 0, & y' = 0 \end{cases}$	$z = -y'$	$z = \begin{cases} \frac{y'}{y}, & y \neq 0 \\ 100, & y = 0 \end{cases}$
1z	2z	3z
$z = -y$	$z = \begin{cases} 30, & y + 21x < -200 \\ 10, & y - 13x < -45 \\ 20, & \text{annars} \end{cases}$	$z = \begin{cases} 1.5y, & 3y + 43x > 40 \\ -0.8y, & 2y + 43x < 187 \\ -2y, & \text{annars} \end{cases}$
4z	5z	6z
$z = \begin{cases} 10y, & y - 14x > 123 \\ 8y, & y + 36x > 48 \\ \frac{y^2}{10}, & \text{annars} \end{cases}$	$z = xy$	$z = y + 2x^2$
7z	8z	9z

z10 $z = \frac{y}{5} - x$ 01z	z11 $z = 100\cos\left(\frac{y}{60}\right)$ 11z	z12 $z = 100\sin\left(\frac{y}{25}\right)$ 21z
z13 $z = \begin{cases} \frac{3y}{5}, & y > 50 \\ 2y, & -20 \leq y \leq 50 \\ -0.7y, & y < -20 \end{cases}$ z13	z14 $z = \begin{cases} 2y, & y > 60 \\ 2.1y, & -60 \leq y \leq 60 \\ -1.7y, & y < -60 \end{cases}$ 41z	z15 $z = \begin{cases} 30, & x^2 + \frac{y^2}{200} < 10 \\ 20, & 10 \leq x^2 + \frac{y^2}{200} \leq 30 \\ 10, & x^2 + \frac{y^2}{200} > 30 \end{cases}$ 51z
z16 $z = \begin{cases} 10, & x^2 + \frac{y^2}{100} < 15 \\ 30, & 15 \leq x^2 + \frac{y^2}{100} < 50 \\ 20, & x^2 + \frac{y^2}{100} \geq 50 \end{cases}$ z16	z17 $z = y $ 71z	z18 $z = y - 10x $ 81z

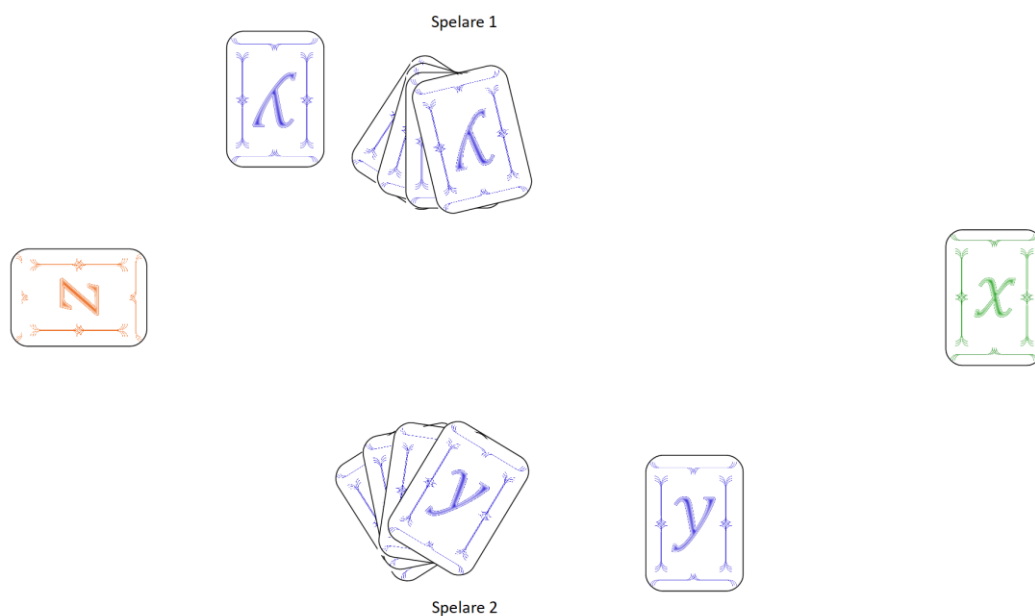


Kortens olika delar

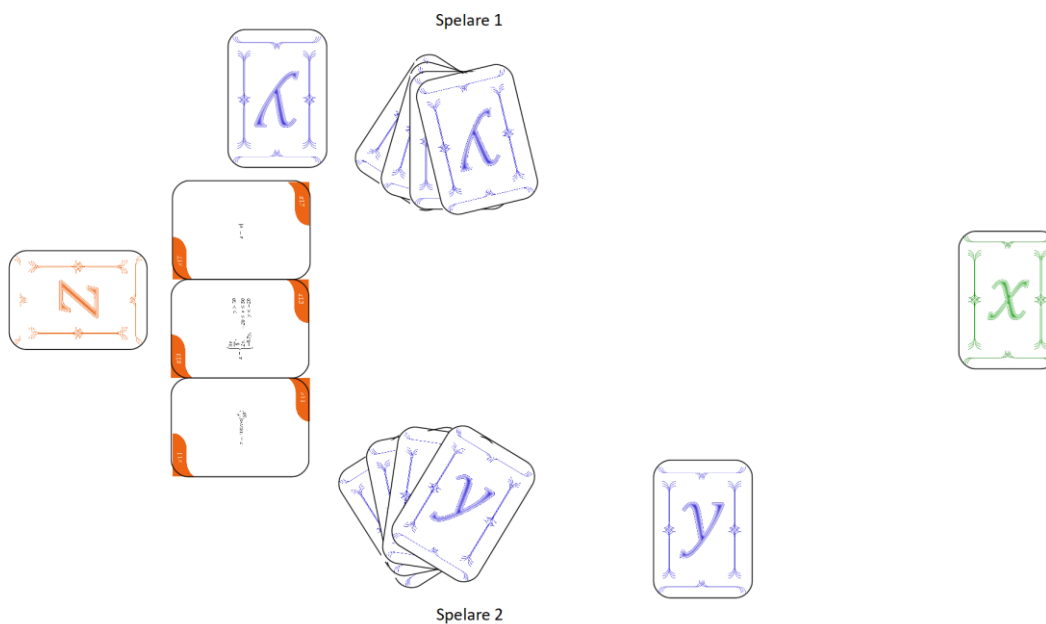


Bilaga 3, Exempelparti

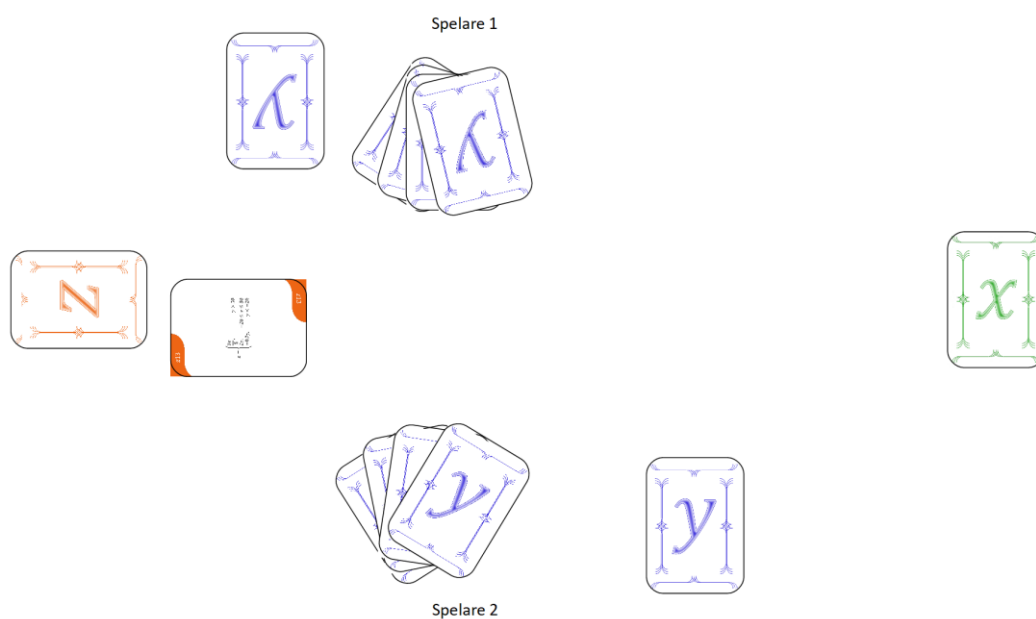
1. Varje spelare drar 4 Y-kort.



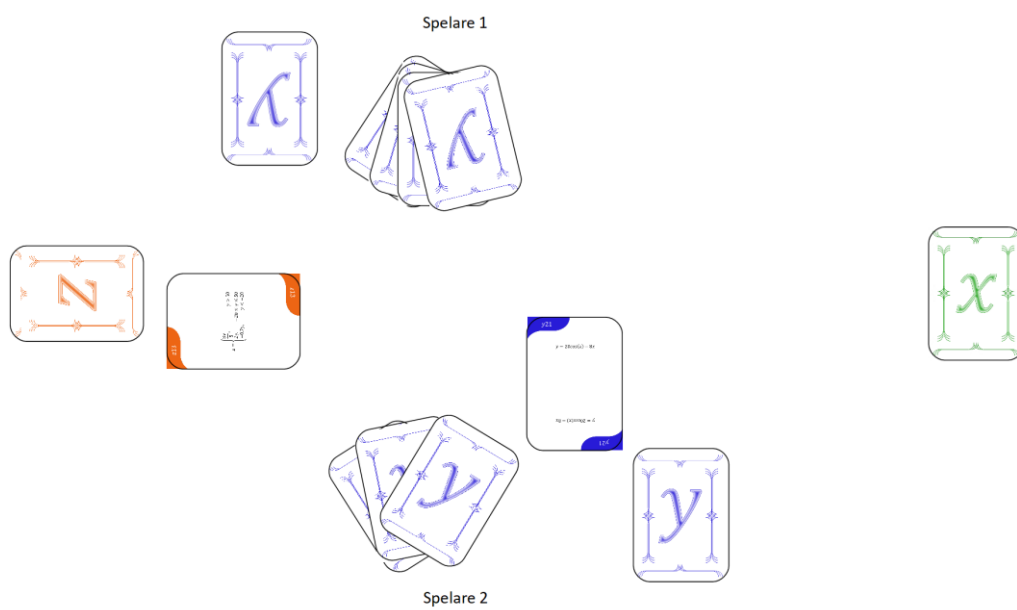
2. De 3 översta Z-korten vänds upp.



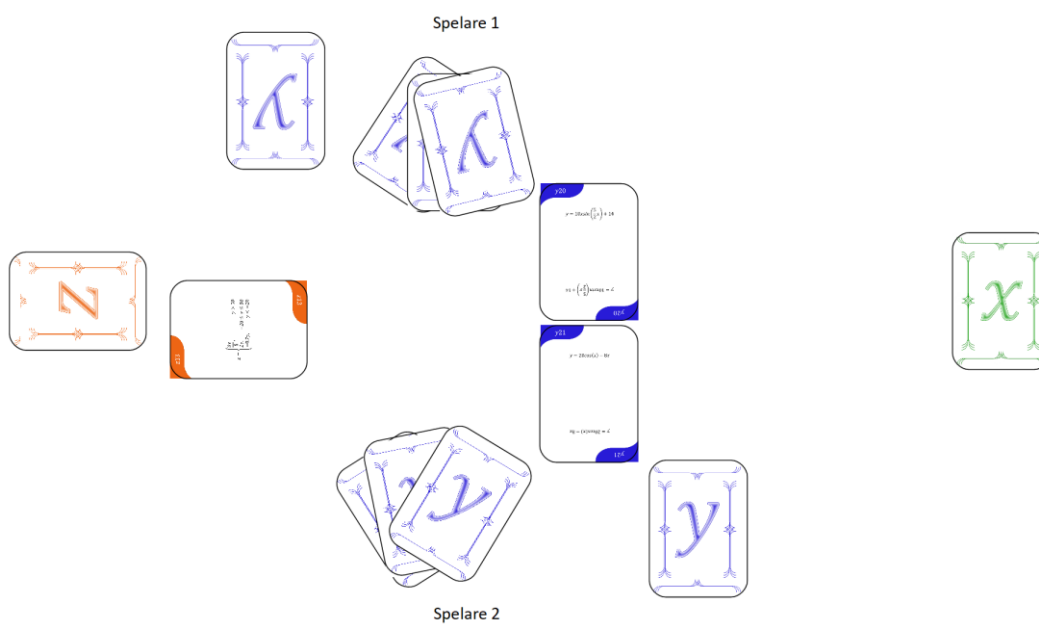
3. Spelarena väljer ett av de uppvända Z-korten.



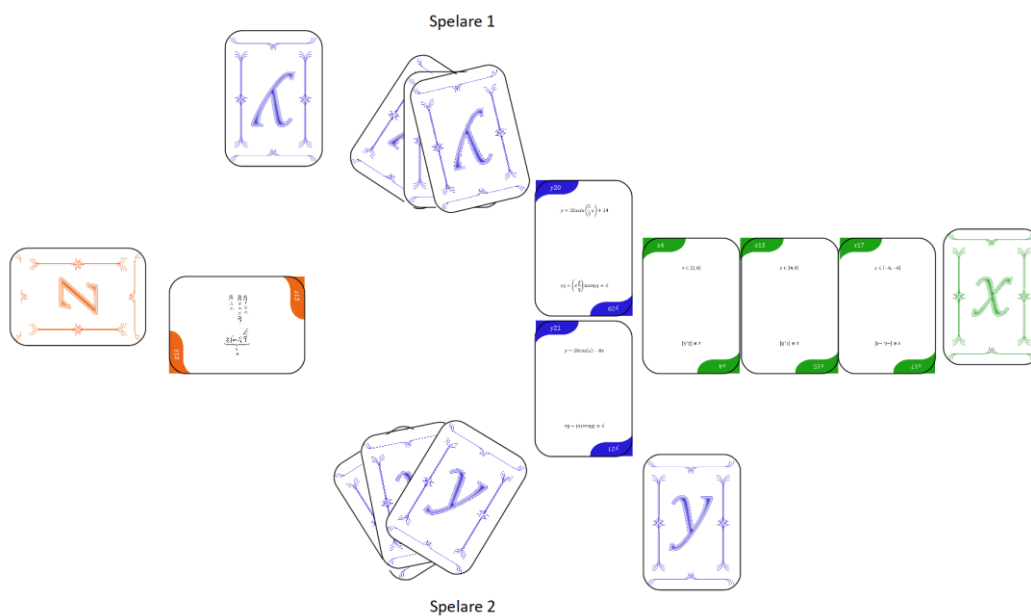
4. Spelare 2 är snabbast att välja ett Y-kort från sin hand och lägger fram det uppvänt på spelplanen framför sig.



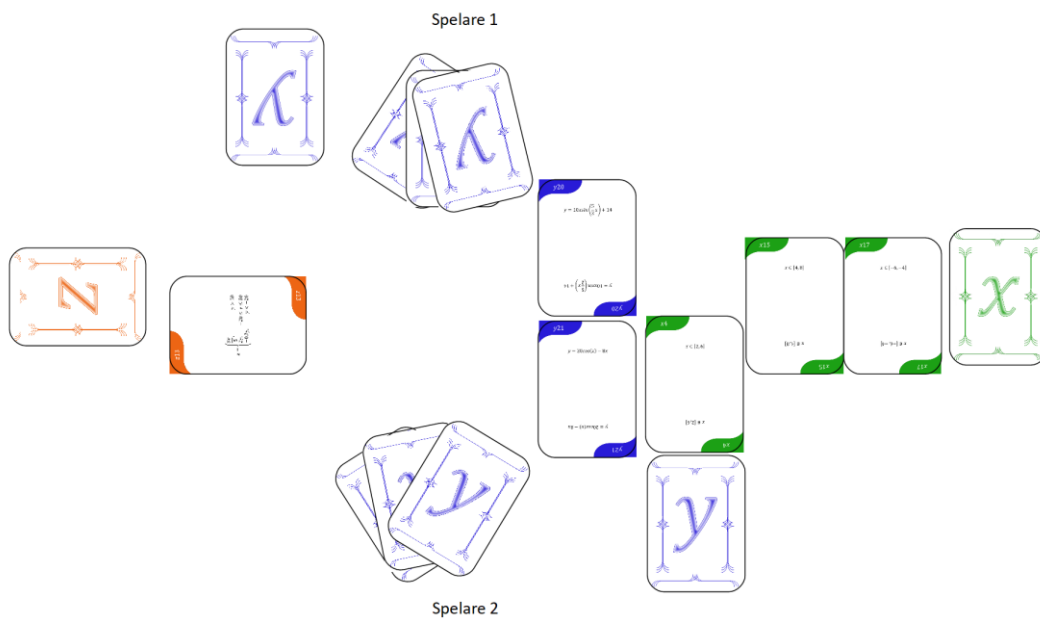
5. Spelare 1 väljer ett av sina Y-kort och lägger fram det uppvänt framför sig på spelplanen.



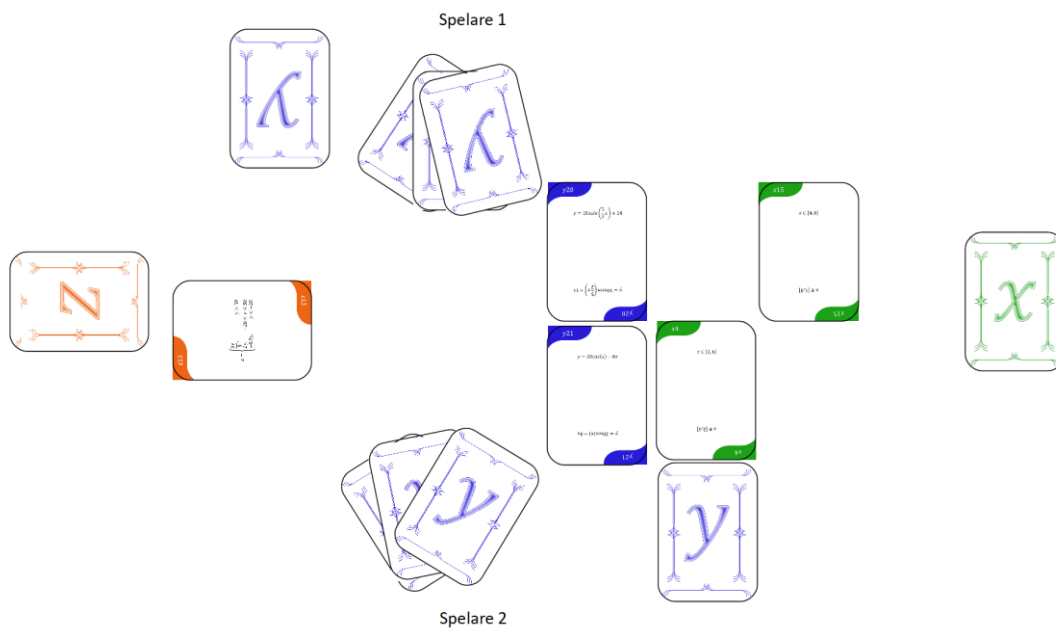
6. De tre översta X-korten vänds upp.



7. Eftersom spelare 2 var snabbast att spela sitt Y-kort väljer denne X-kort först.



8. Efter att spelare 2 valt sitt X-kort väljer spelare 1 ett av de två kvarvarande X-korten.



9. Spelare 1 väljer att ha en 6-sidig tärning som slumpgenerator och skapar en lämplig slumpfunktion utifrån det intervall som återfinns på dennes X-kort. Spelare 2 väljer att slumpa ett tal mellan 0 och 100 och skapar en slumpfunktion utifrån det intervall som återfinns på dennes X-kort

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{5} s_t + \frac{6a-b}{5}$$

$$= \frac{8-4}{5} s_t + \frac{6 \cdot 4 - 8}{5}$$

$$= \frac{4}{5} s_t + \frac{16}{5}$$

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{100} s_t + a$$

$$= \frac{6-2}{100} s_t + 2$$

$$= \frac{4}{100} s_t + 2$$

The diagram illustrates the setup for two players. Player 1 is shown with a 6-sided die and a set of cards labeled X, Y, and Z. Player 2 is shown with a 100-sided die and a set of cards labeled X, Y, and Z. The cards contain mathematical formulas and intervals. The cards for Player 1 are labeled X, Y, and Z, and the cards for Player 2 are labeled X, Y, and Z. The cards for Player 1 are labeled X, Y, and Z, and the cards for Player 2 are labeled X, Y, and Z.

10. Spelare ett slumpar ett tal och får slumptalet 2.

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{5} s_t + \frac{6a-b}{5}$$

$$= \frac{8-4}{5} s_t + \frac{6 \cdot 4 - 8}{5}$$

$$= \frac{4}{5} s_t + \frac{16}{5}$$

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{100} s_t + a$$

$$= \frac{6-2}{100} s_t + 2$$

$$= \frac{4}{100} s_t + 2$$

$s_t = 2$

The diagram illustrates the setup for two players, similar to the previous diagram, but with the addition of the value $s_t = 2$. Player 1 is shown with a 6-sided die and a set of cards labeled X, Y, and Z. Player 2 is shown with a 100-sided die and a set of cards labeled X, Y, and Z. The cards contain mathematical formulas and intervals. The cards for Player 1 are labeled X, Y, and Z, and the cards for Player 2 are labeled X, Y, and Z.

11. Det slumpade talet 2 sätts in i slumpfunktionen och ger spelare 1 x-värdet 4,8.

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{5}s_t + \frac{6a-b}{5}$$

$$= \frac{8-4}{5}s_t + \frac{6 \cdot 4 - 8}{5}$$

$$= \frac{4}{5}s_t + \frac{16}{5}$$

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{100}s_t + a$$

$$= \frac{6-2}{100}s_t + 2$$

$$= \frac{4}{100}s_t + 2$$

Spelare 1

$s_t = 2$
 $x = 4,8$

Spelare 2

12. Spelare 1s x-värde sätts in i funktionen på dennes Y-kort, vilket ger y-värdet -11,755

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{5}s_t + \frac{6a-b}{5}$$

$$= \frac{8-4}{5}s_t + \frac{6 \cdot 4 - 8}{5}$$

$$= \frac{4}{5}s_t + \frac{16}{5}$$

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{100}s_t + a$$

$$= \frac{6-2}{100}s_t + 2$$

$$= \frac{4}{100}s_t + 2$$

Spelare 1

$s_t = 2$
 $x = 4,8$
 $y = -11,755$

Spelare 2

13. Spelare 1s y-värde sätts in i funktionen på det gemensamma Z-kortet och ger spelare 1 z-värdet -23,511

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{5}s_t + \frac{6a-b}{5}$$

$$= \frac{8-4}{5}s_t + \frac{6 \cdot 4 - 8}{5}$$

$$= \frac{4}{5}s_t + \frac{16}{5}$$

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{100}s_t + a$$

$$= \frac{6-2}{100}s_t + 2$$

$$= \frac{4}{100}s_t + 2$$

Spelare 1

Spelare 2

$s_t = 2$
 $x = 4,8$
 $y = -11,755$
 $z = -23,511$

$s_t = 34$

14. Spelare 2 slumpar sitt tal och får slumptalet 34.

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{5}s_t + \frac{6a-b}{5}$$

$$= \frac{8-4}{5}s_t + \frac{6 \cdot 4 - 8}{5}$$

$$= \frac{4}{5}s_t + \frac{16}{5}$$

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{100}s_t + a$$

$$= \frac{6-2}{100}s_t + 2$$

$$= \frac{4}{100}s_t + 2$$

Spelare 1

Spelare 2

$s_t = 2$
 $x = 4,8$
 $y = -11,755$
 $z = -23,511$

$s_t = 34$

15. Spelare 2s slumptal sätts in i dennes slumpfunktion och ger spelare 2 x-värdet 3,36

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{5}s_t + \frac{6a-b}{5}$$

$$= \frac{8-4}{5}s_t + \frac{6*4-8}{5}$$

$$= \frac{4}{5}s_t + \frac{16}{5}$$

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{100}s_t + a$$

$$= \frac{6-2}{100}s_t + 2$$

$$= \frac{4}{100}s_t + 2$$

Spelare 1

Spelare 2

$s_t = 2$
 $x = 4,8$
 $y = -11,755$
 $z = -23,511$

$s_t = 34$
 $x = 3,36$

16. Spelare 2s x-värde sätts in i funktionen på dennes Y-kort, vilket ger spelare 2 y-värdet -46,40488.

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{5}s_t + \frac{6a-b}{5}$$

$$= \frac{8-4}{5}s_t + \frac{6*4-8}{5}$$

$$= \frac{4}{5}s_t + \frac{16}{5}$$

Slumpfunktion:

$$f(s_t) = \frac{b-a}{100}s_t + a$$

$$= \frac{6-2}{100}s_t + 2$$

$$= \frac{4}{100}s_t + 2$$

Spelare 1

Spelare 2

$s_t = 2$
 $x = 4,8$
 $y = -11,755$
 $z = -23,511$

$s_t = 34$
 $x = 3,36$
 $y = -46,40488$

Spelare 1

Hand: $s_t = 2$
 $x = 4,8$
 $y = -11,755$
 $z = -23,511$

Spelare 2

Hand: $s_t = 34$
 $x = 3,36$
 $y = -46,40488$
 $z = 32,48341$

Bilaga 4, Spelprotokoll

Two persons

Datum:

Kod:

Parti 1

Namn spelare 1:

Namn spelare 2:

Hand:

Hand:

Uppvända Z-kort:

Val av Z-kort:

Val av Z-kort:

Valt Z-kort:

Spelat Y-kort:

Spelat Y-kort:

Först till X-kortleken:

Spelare 1

Spelare 2

Uppvända X-kort:

Valt X-kort:

Valt X-kort:

Vald slumpmetod:

Vald slumpmetod:

Utfallsrum: $s_t \in [\square, \square]$ Utfallsrum: $s_t \in [\square, \square]$ Slumpfunktion: $x = f(s_t)$ Slumpfunktion: $x = f(s_t)$ $f(s_t) =$ $f(s_t) =$ Slumpat tal, s_t :Slumpat tal, s_t :

x-värde:

x-värde:

y-värde:

y-värde:

z-värde:

z-värde:

Vinnare:

Spelare 1

Spelare 2

Three persons

Datum:

Kod:

Parti 1

Namn spelare 1:

Namn spelare 2:

Namn spelare 3:

Hand:

Hand:

Hand:

Uppvända Z-kort:

Val av Z-kort:

Val av Z-kort:

Val av Z-kort:

Valt Z-kort:

Spelat Y-kort:

Spelat Y-kort:

Spelat Y-kort:

Först till X-kortleken:

Spelare 1

Spelare 2

Spelare 3

Uppvända X-kort:

Valt X-kort:

Valt X-kort:

Valt X-kort:

Vald slumpmetod:

Vald slumpmetod:

Vald slumpmetod:

Utfallsrum: $s_t \in [\square, \square]$ Utfallsrum: $s_t \in [\square, \square]$ Utfallsrum: $s_t \in [\square, \square]$ Slumpfunktion: $x = f(s_t)$ Slumpfunktion: $x = f(s_t)$ Slumpfunktion: $x = f(s_t)$ $f(s_t) =$ $f(s_t) =$ $f(s_t) =$ Slumpat tal, s_t :Slumpat tal, s_t :Slumpat tal, s_t :

x-värde:

x-värde:

x-värde:

y-värde:

y-värde:

y-värde:

z-värde:

z-värde:

z-värde:

Vinnare:

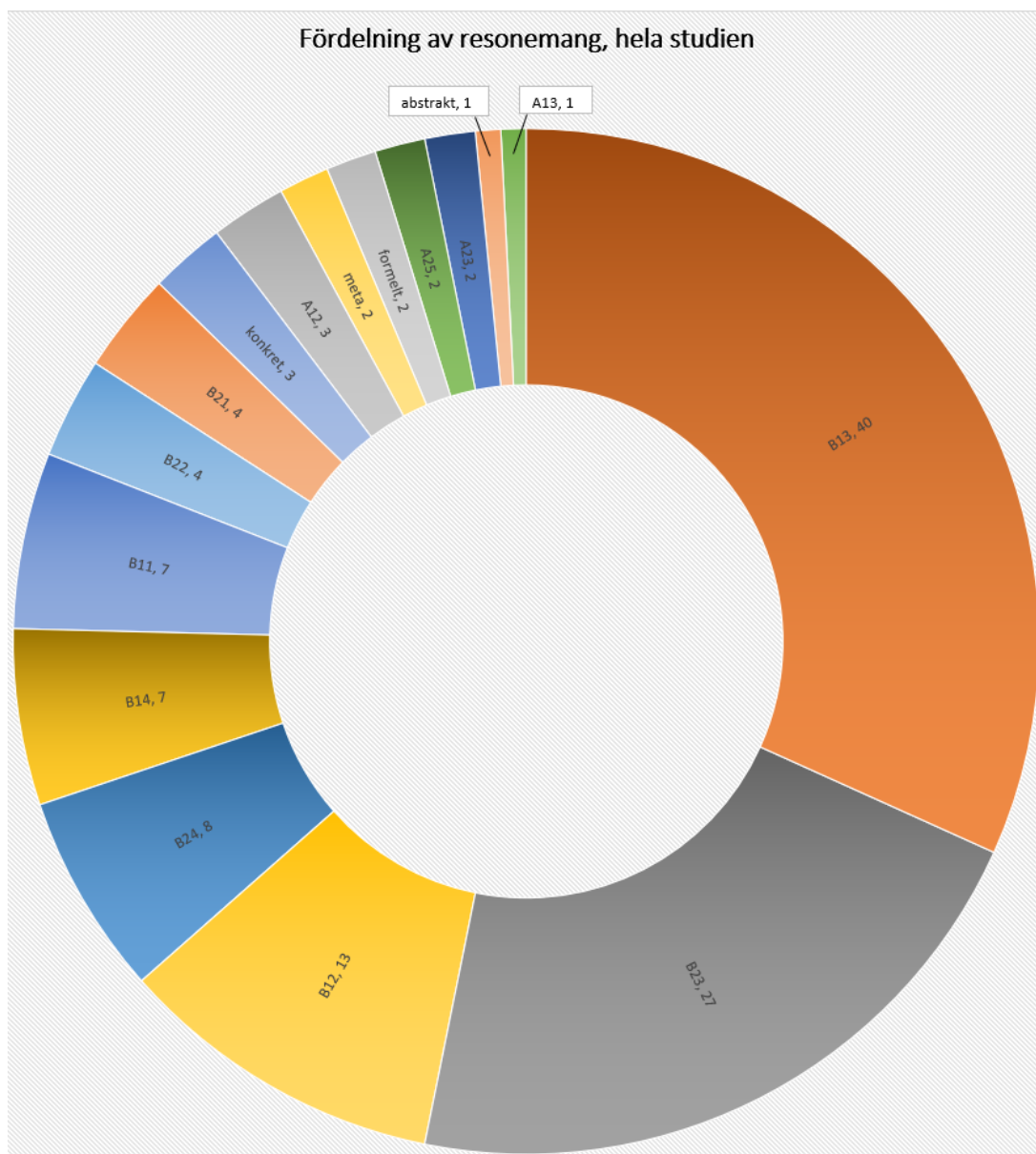
Spelare 1

Spelare 2

Spelare 3

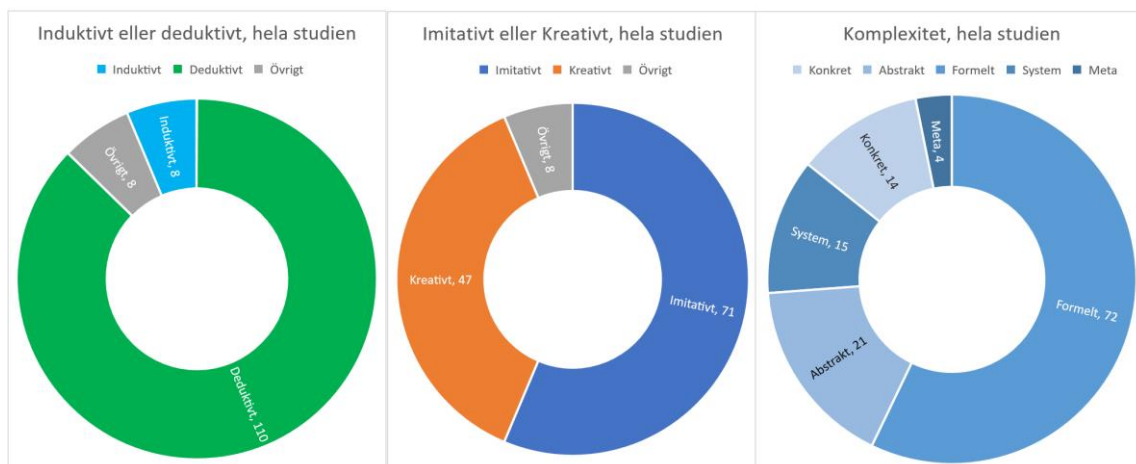
Bilaga 5, Diagram

Hela studien



Vanligaste kategori:: B13

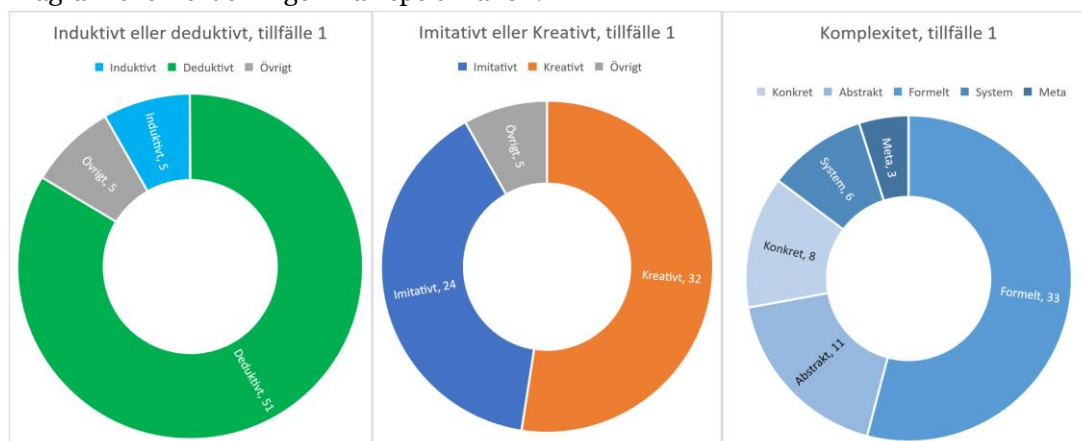
Diagram över fördelningen mellan de olika kategorierna för hela studien.



Speltillfälle 1

Vanligaste kategori:: B23

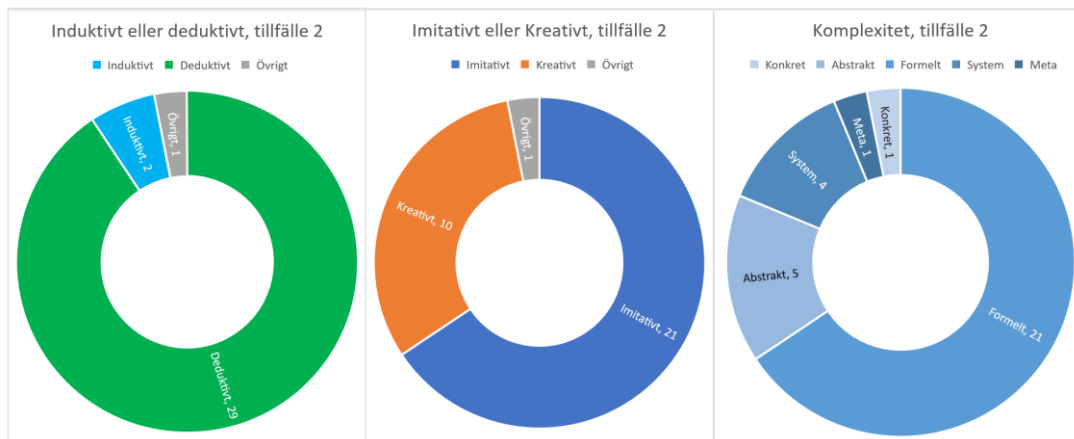
Diagram över fördelningen från speltillfälle 1.



Speltillfälle 2

Vanligaste kategori: B13

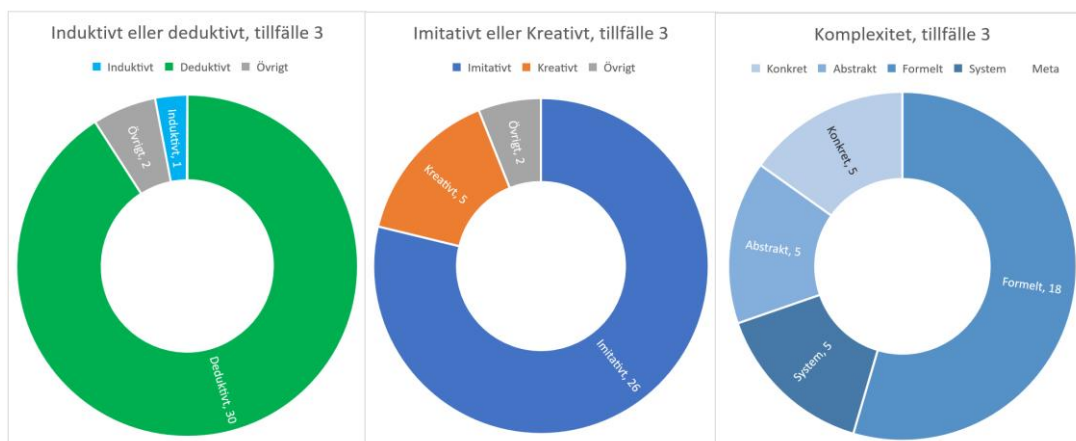
Diagram över fördelningen från speltillfälle 2.



Speltillfälle 3

Vanligaste kategori: B13

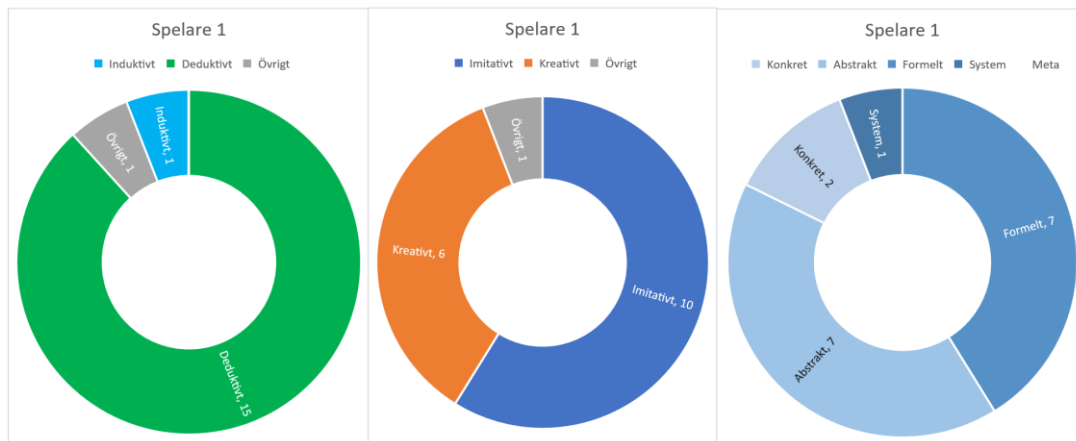
Diagram över fördelningen från speltillfälle 3.



Spelare 1

Vanligaste kategori: B12

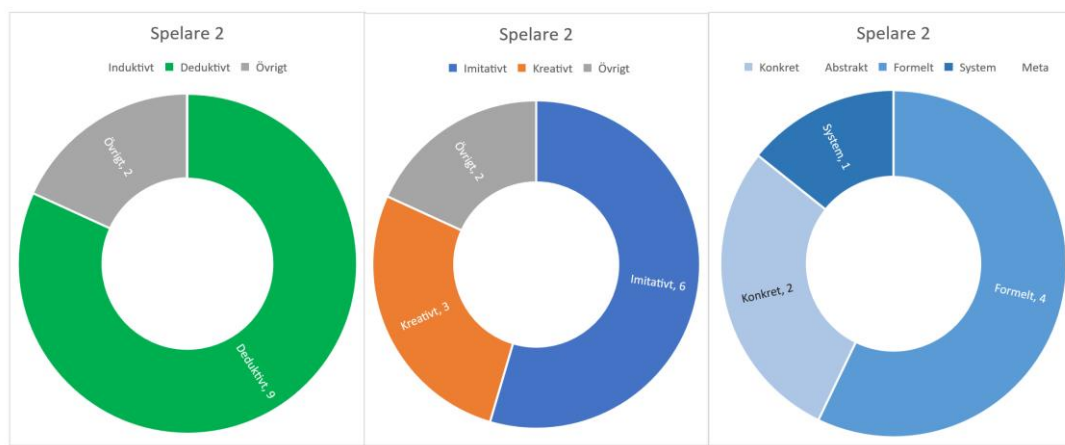
Diagram över fördelningen för spelare 1



Spelare 2

Vanligaste kategori: B13

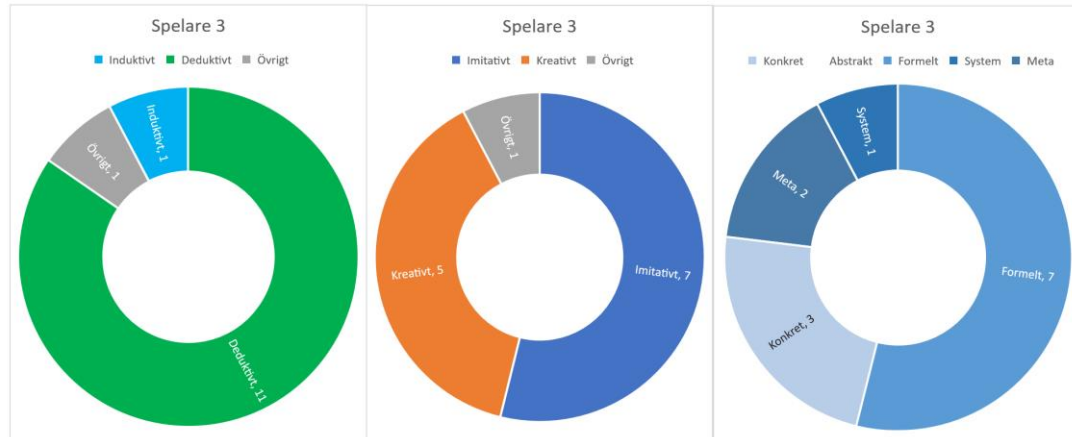
Diagram över fördelningen för spelare 2



Spelare 3

Vanligaste kategori: B13

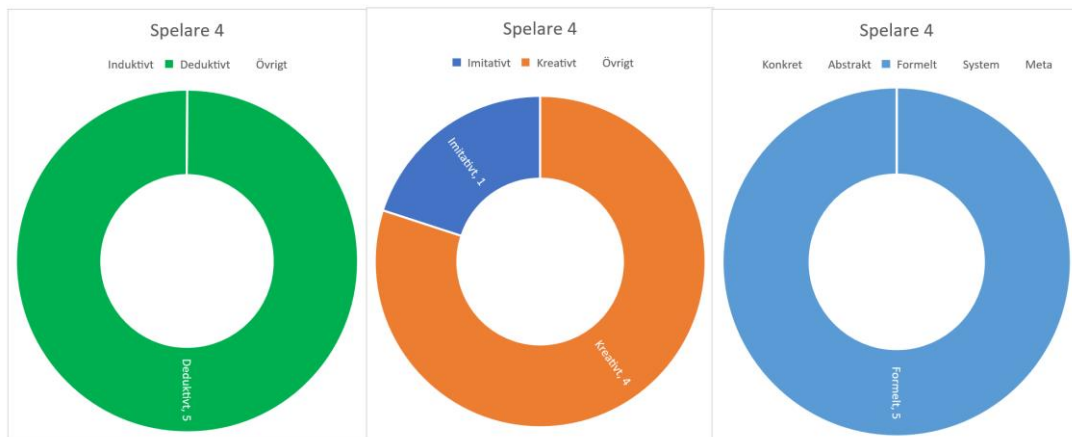
Diagram över fördelningen för spelare 3



Spelare 4

Vanligaste kategori: B23

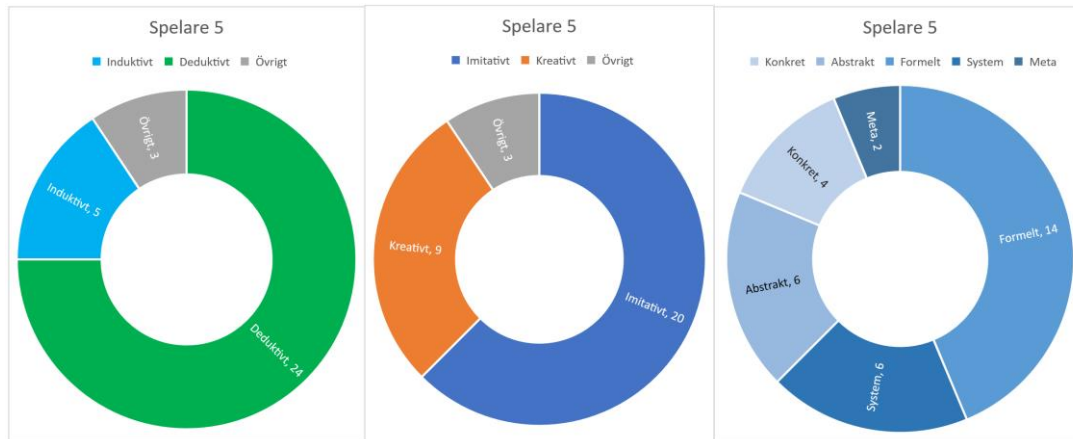
Diagram över fördelningen för spelare 4



Spelare 5

Vanligaste kategori: B13

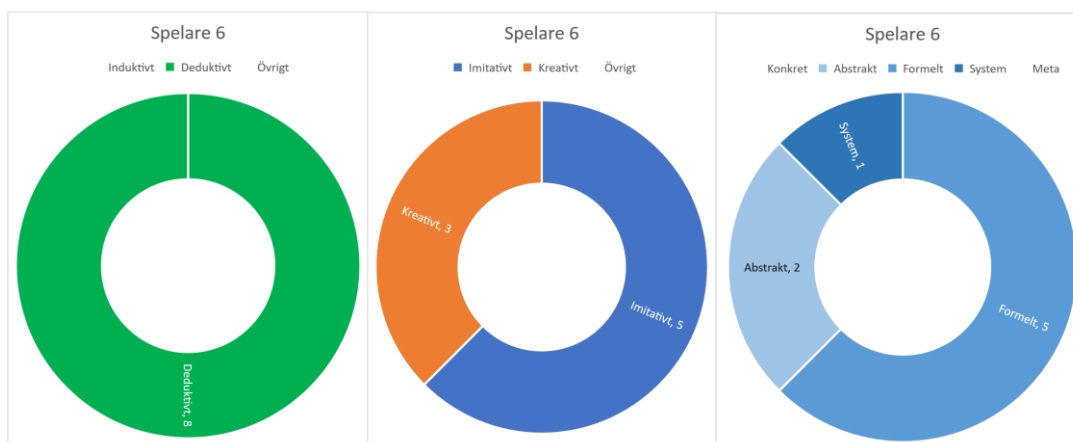
Diagram över fördelningen för spelare 5



Spelare 6

Vanligaste kategori: B13

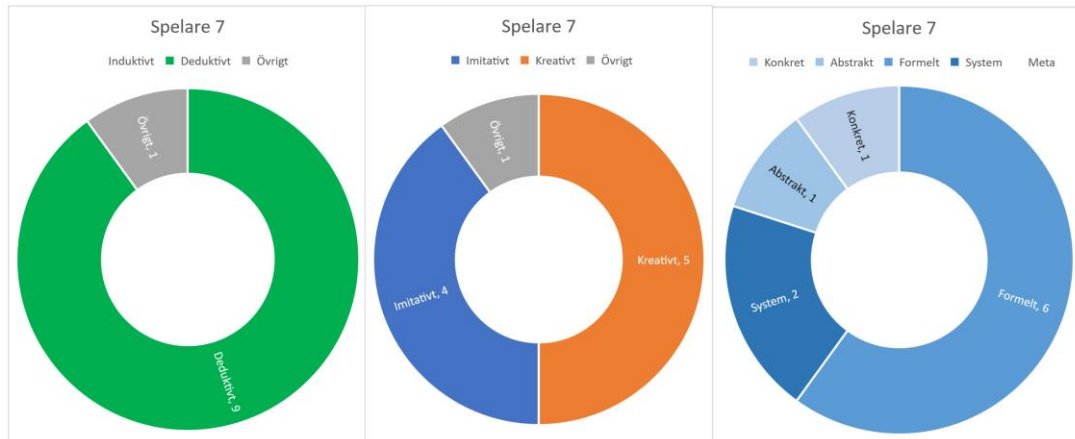
Diagram över fördelningen för spelare 6



Spelare 7

Vanligaste kategori: B13

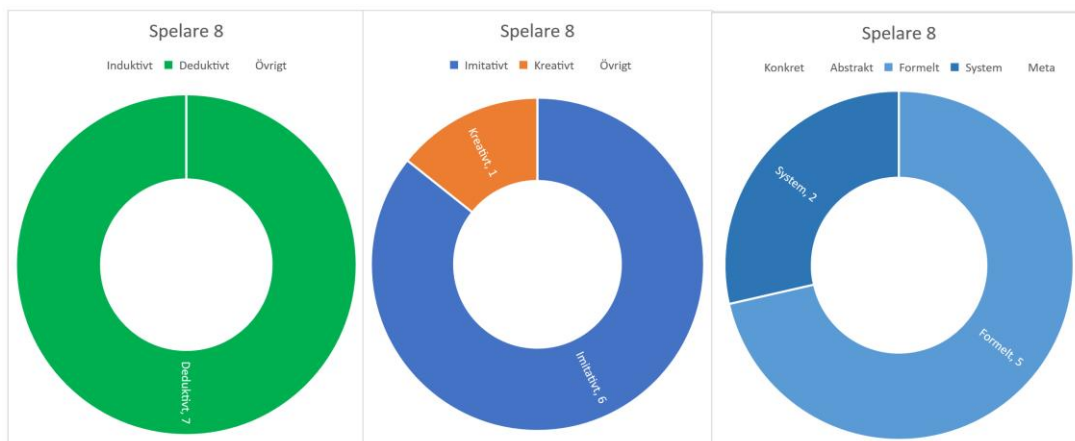
Diagram över fördelningen för spelare 7



Spelare 8

Vanligaste kategori: B13

Diagram över fördelningen för spelare 8



Spelare 9

Vanligaste kategori: B13

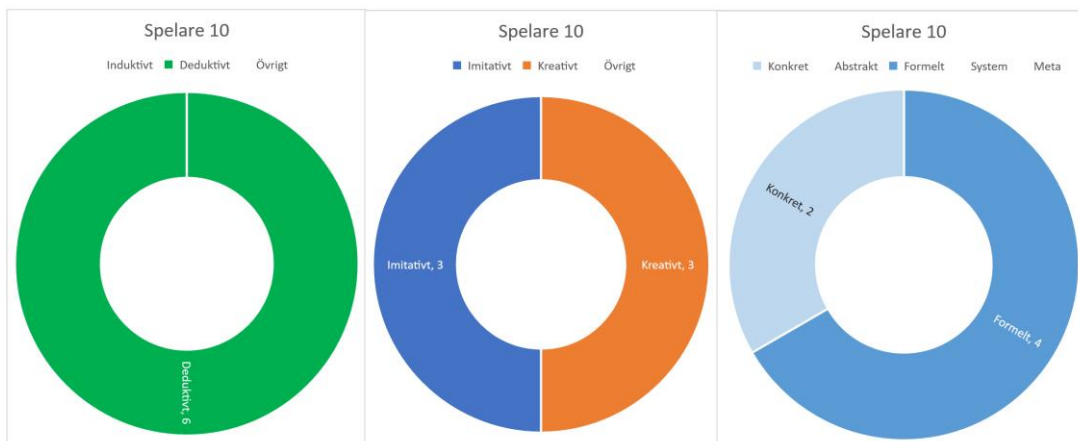
Diagram över fördelningen för spelare 9



Spelare 10

Vanligaste kategori: B13

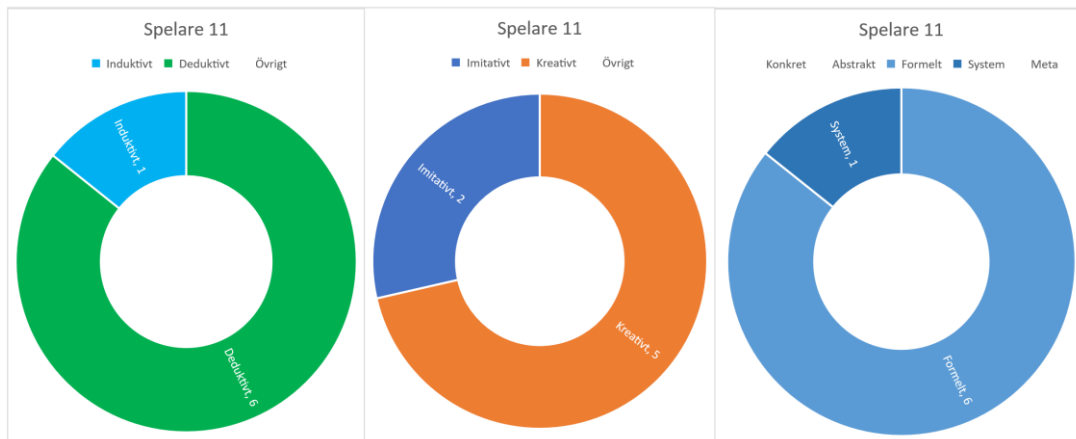
Diagram över fördelningen för spelare 10



Spelare 11

Vanligaste kategori: B23

Diagram över fördelningen för spelare 11



Spelare 12

Vanligaste kategori: B12

Diagram över fördelningen för spelare 12



Spelare 13

Vanligaste kategori:: B13

Diagram över fördelningen för spelare 13

