

Föreläsning 14

SF 1661 HT 20

5/10

Gränsvärden för

• Talföljder $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots\}$

- serier $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

• Funktioner $f(x)$

- $x \rightarrow \infty$

- $x \rightarrow a \neq \infty$

Let derivatives definition

Talföljder

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Ex

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

En talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

kan ses som en funktion

$$a_n = a(n)$$

$$a: \mathbb{N} \rightarrow V$$

Ex

$$a_n = a_n = \frac{1}{n}$$

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$

Skriv ut några av de
första elementen i
följande talföljder

$$\{n^2\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$$

$$\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$$

$$\left\{ 1 - \frac{1}{3^n} \right\}_{n=0}^{\infty} =$$

$$= \left\{ 1, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{26}{27}, \dots \right\}$$

$n=0$ $n=1$ $n=2$ $n=3$

Gränsvärdet av talföljder

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\left\{ \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) \right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ 0, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{26}{27}, \dots \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) = 1$$

Konvergeska

$$\{ \epsilon 11^n \}_{n=0}^{\infty} = \{ 1, -1, 1, -1, \dots \}$$

saknar gränsvärde då $n \rightarrow \infty$

$$\{ n^2 \}_{n=0}^{\infty} = \{ 1, 4, 9, 16, \dots \}$$

saknar gränsvärde då $n \rightarrow \infty$

divergenta

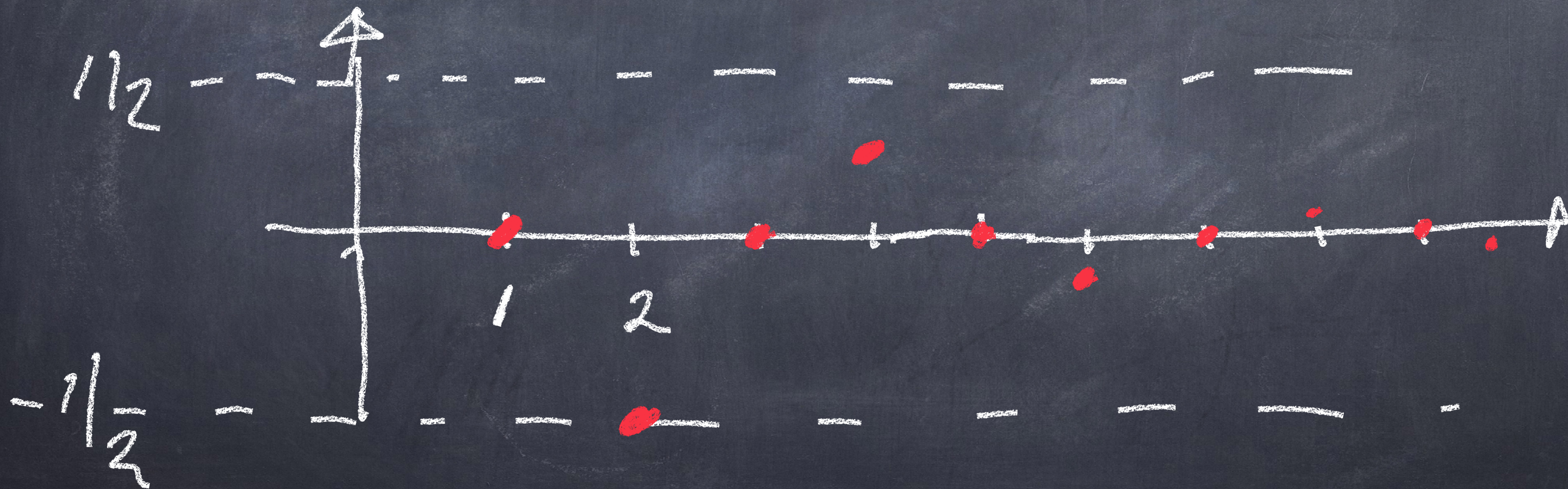
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1$$



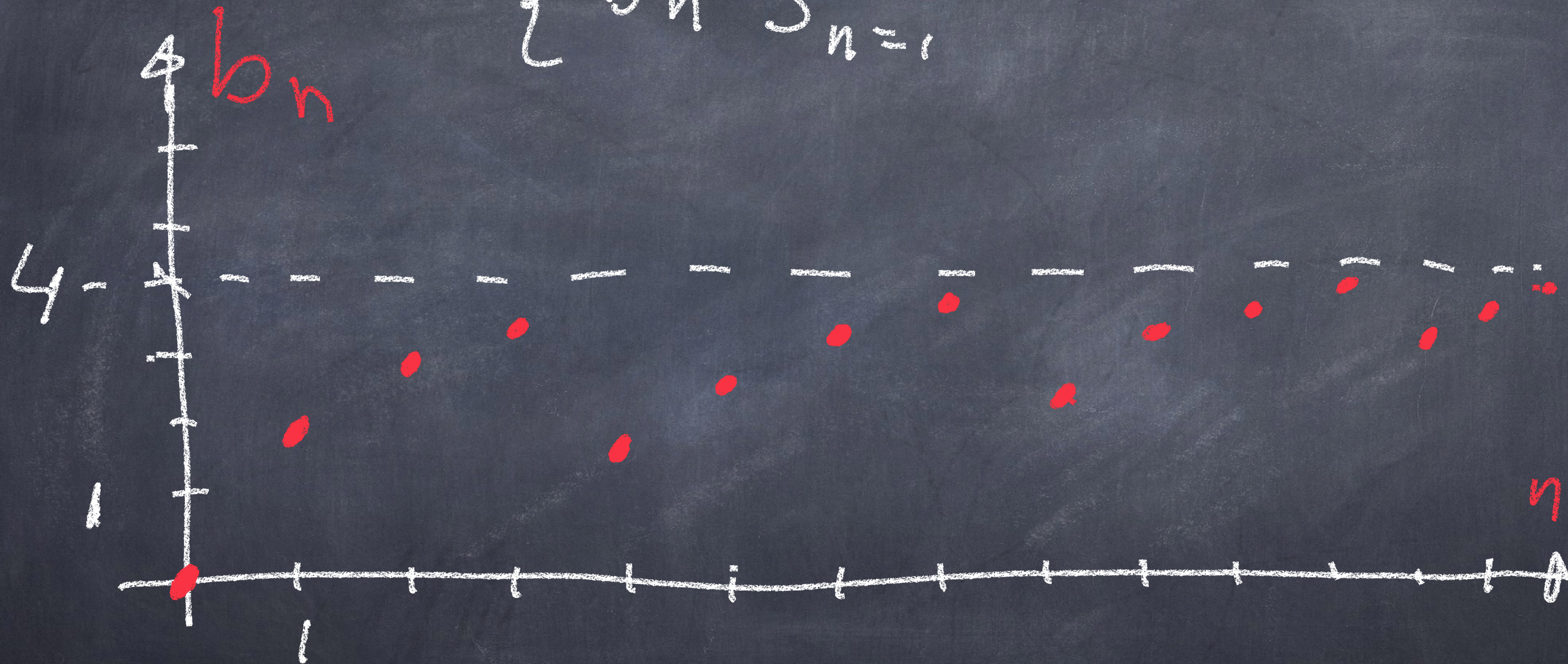
Hu ska vi
definiera

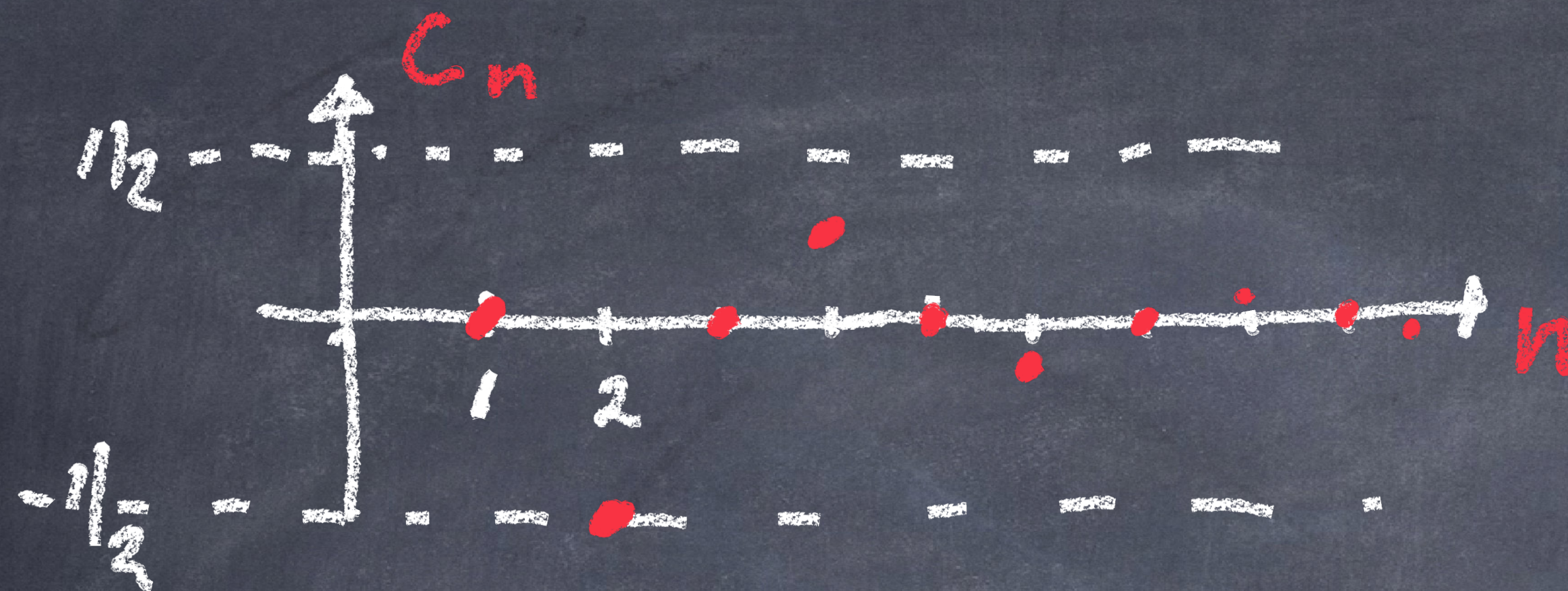
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$$\left\{ \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, \dots \right\}$$

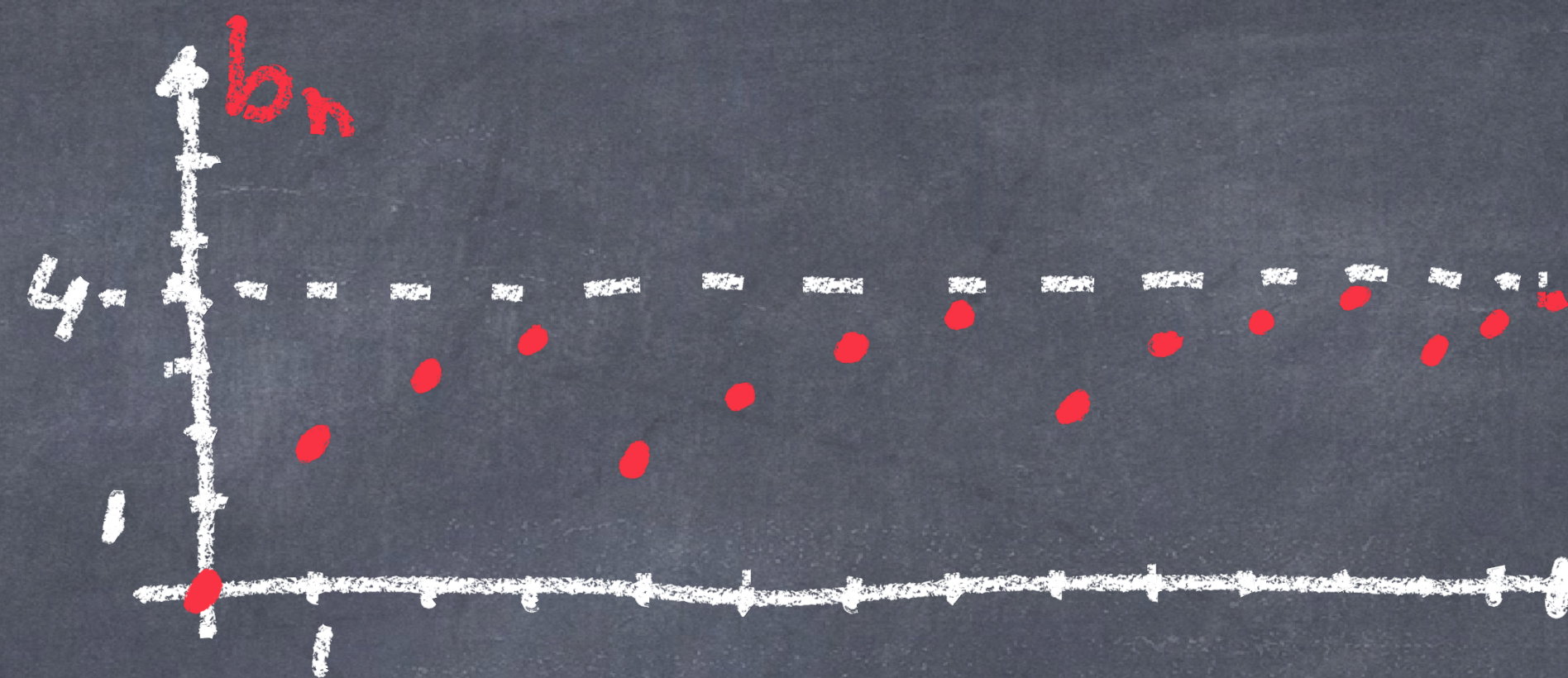


$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$$





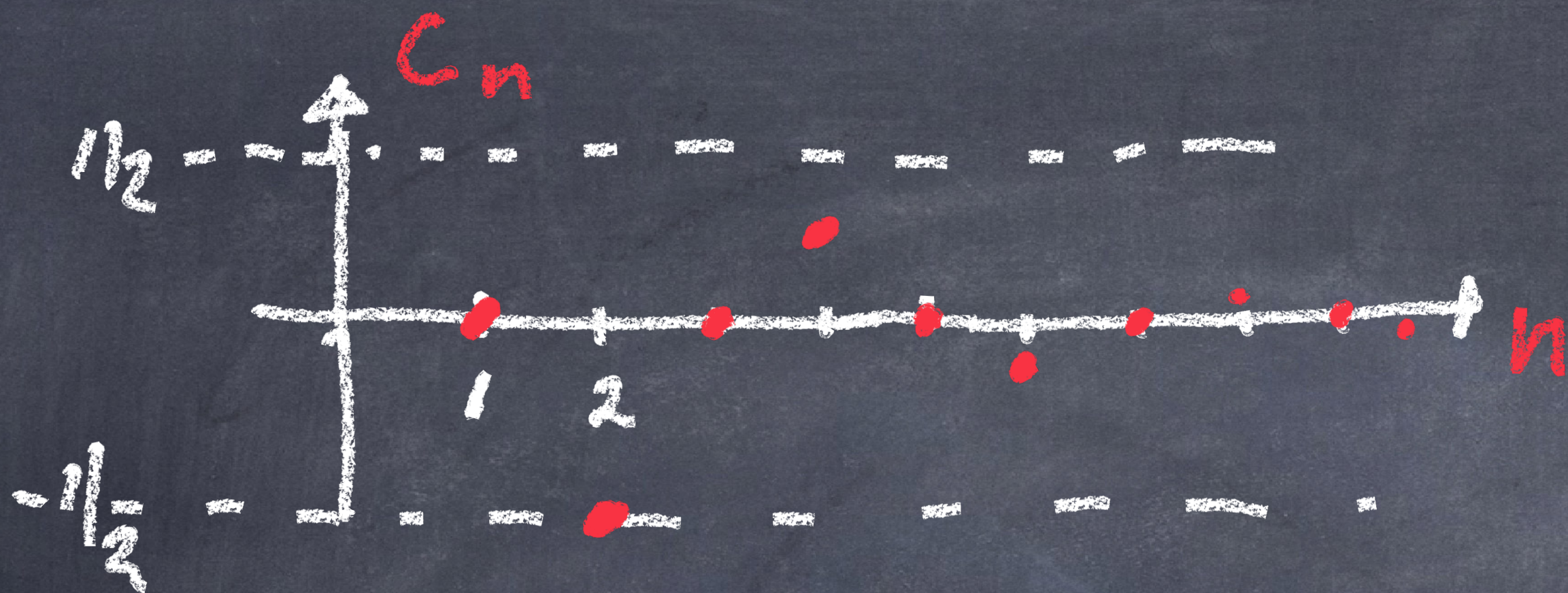
$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$



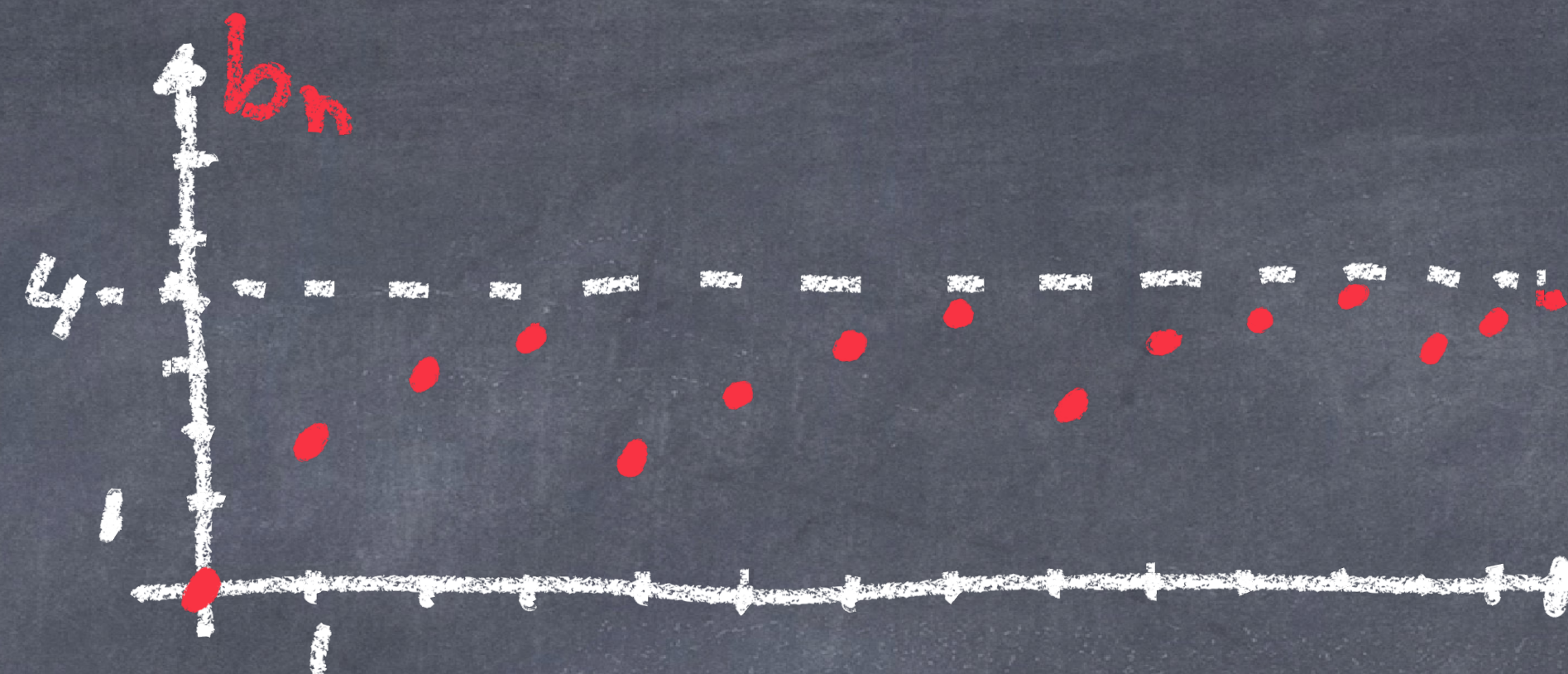
$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

!ad menar $\checkmark$ i ?

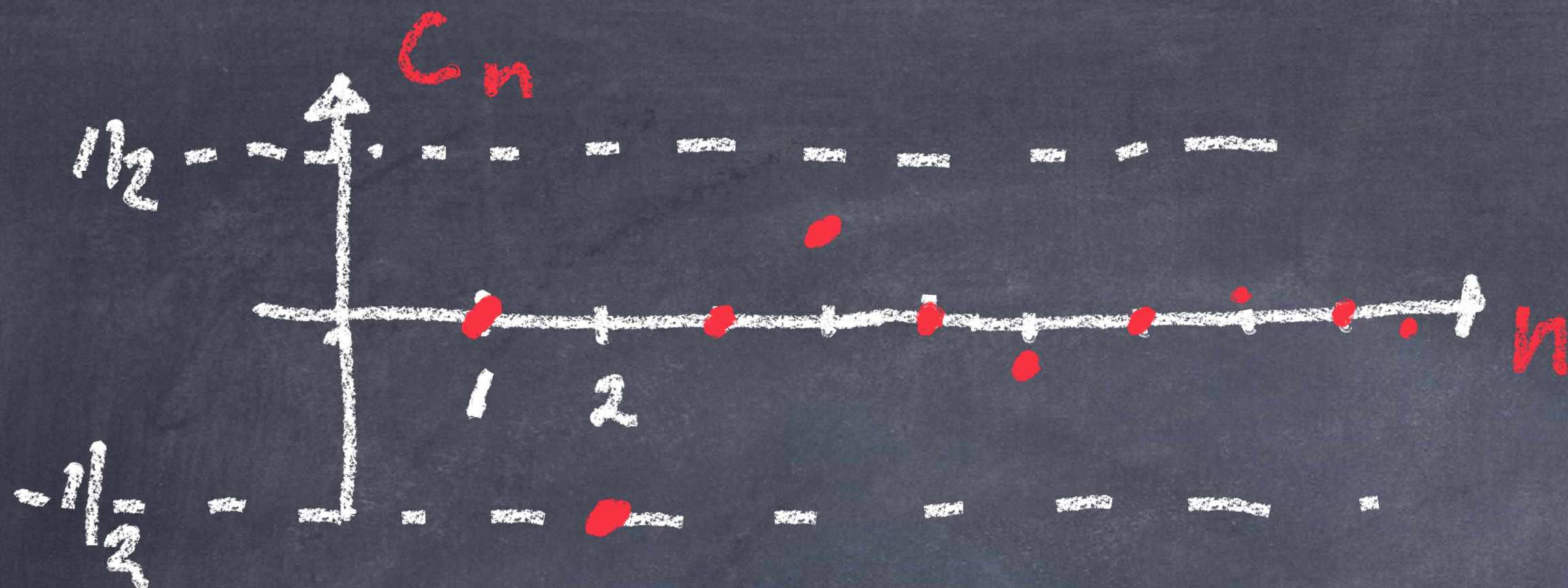


$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

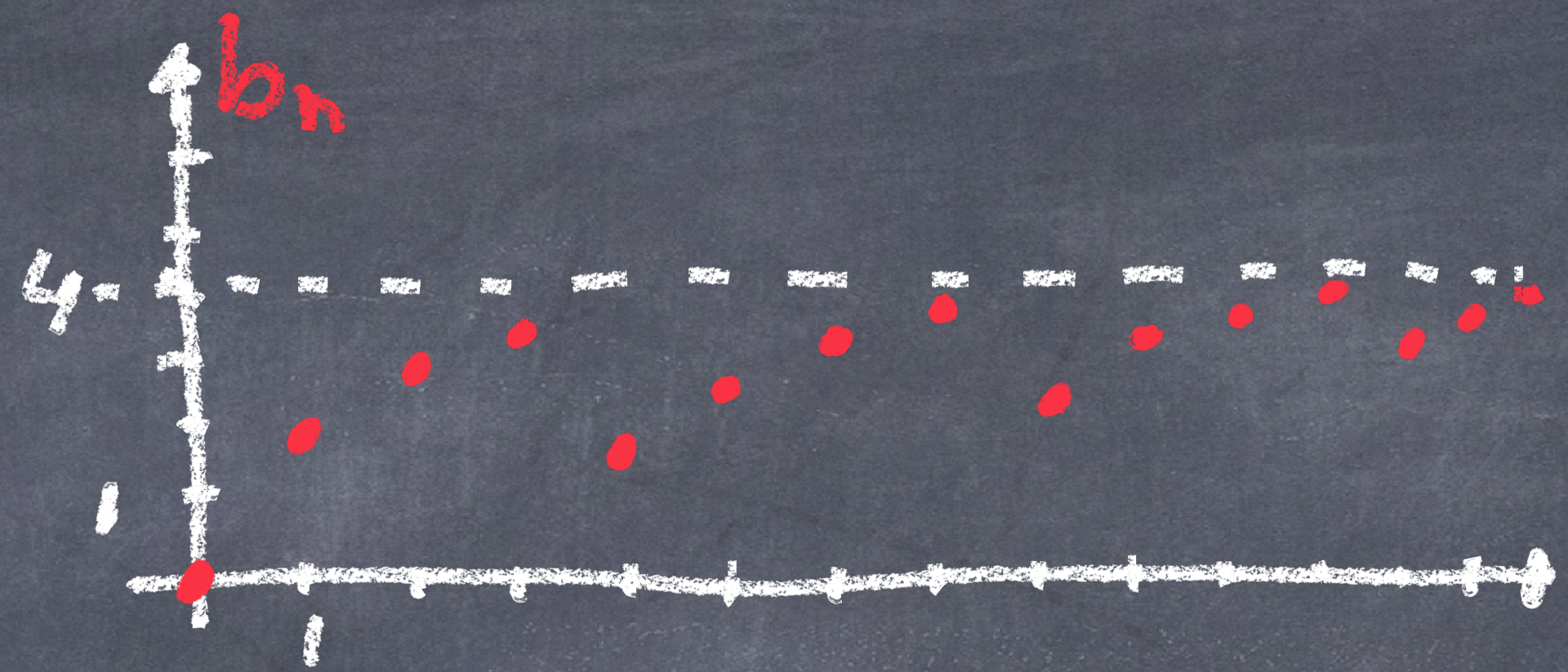


$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

- "a_n kommer närmare och närmare L
je större n blir"

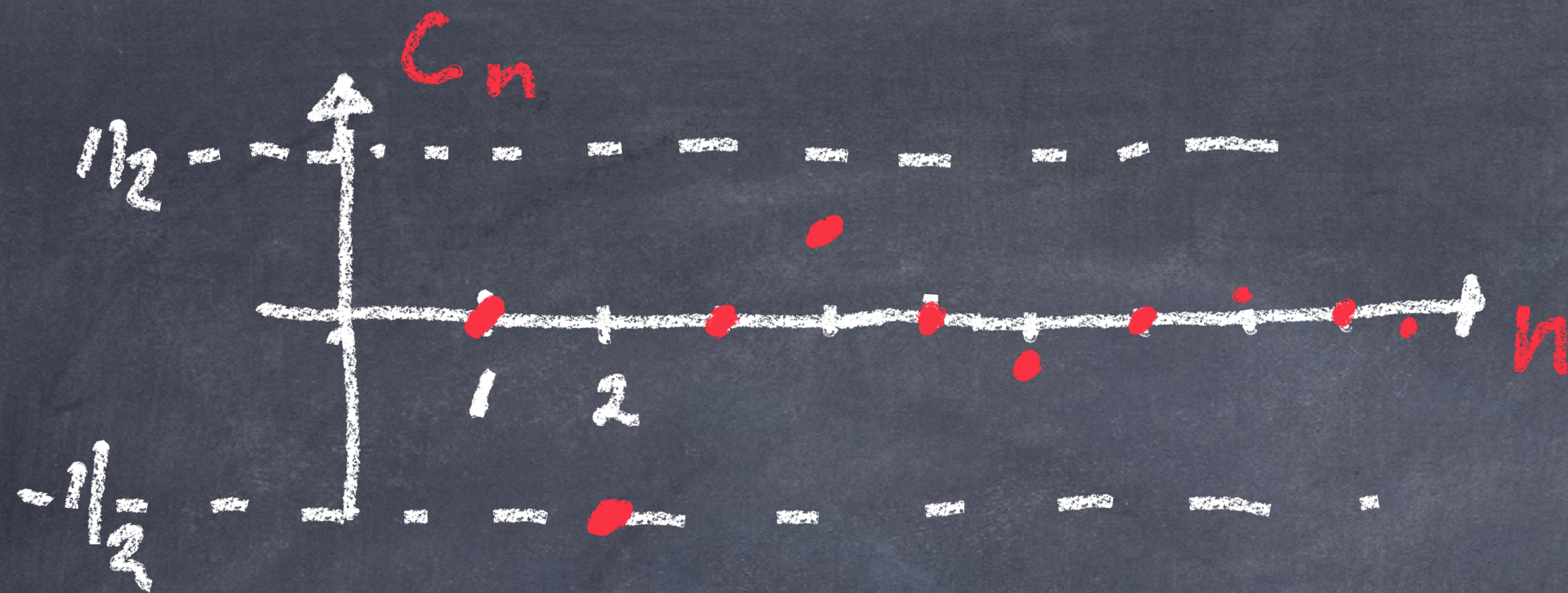


$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

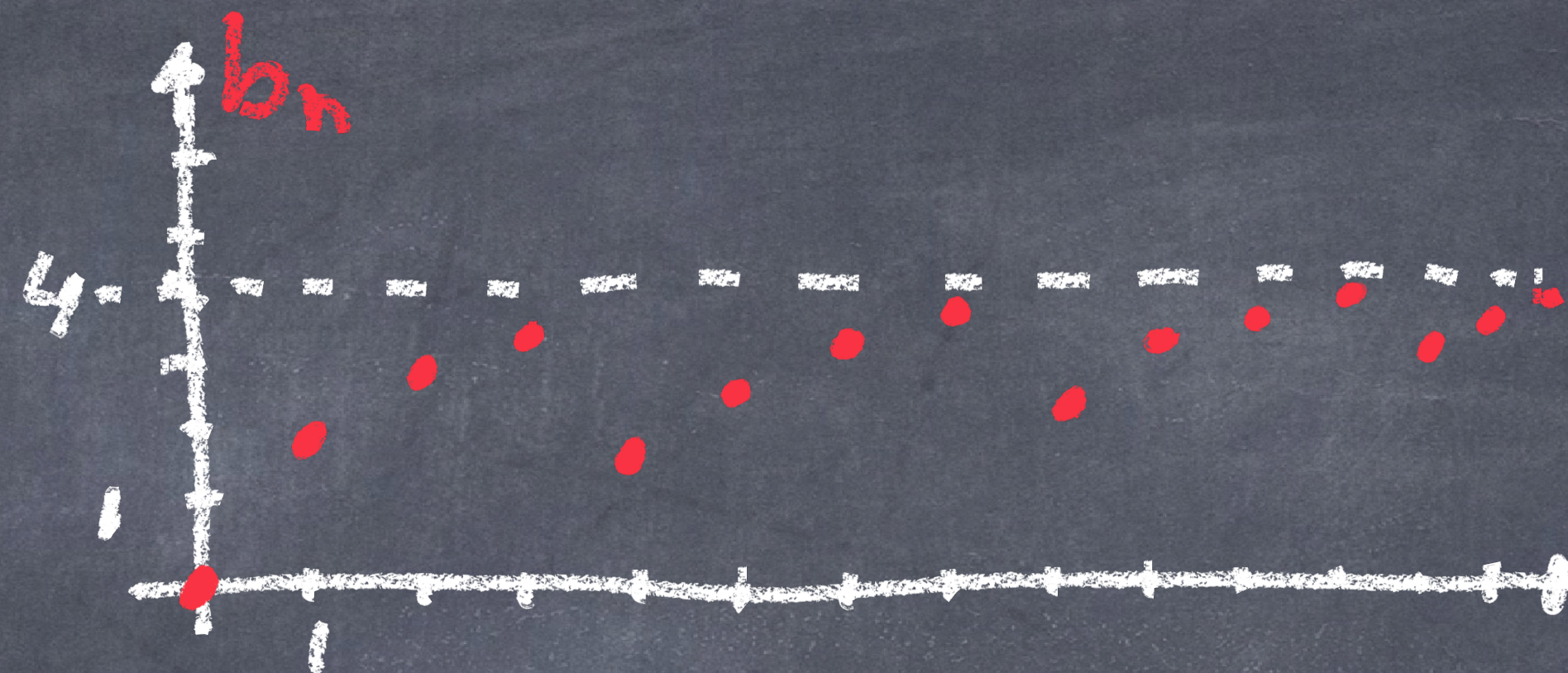


$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

- ~~" a_n kommer närmare och närmare L ju större n blir"~~
- a_n "närmar sig" andra tal också...
- inte monotont
- $a_n = L$ inte "förbjudet"



$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

" a_n ligger godtyckligt nära L
 för alla a_n tillräckligt långt från
 $\bar{L}$ tal följderna."

" a_n ligger godtyckligt nära L
för alla a_n tillräckligt långt från
 $\bar{\epsilon}$ tal följderna."

"Avståndet mellan a_n och L ,
 $|a_n - L|$ kan fås godtyckligt litet

för alla tillräckligt stora n "

"Avståndet mellan a_n och L ,
 $|a_n - L|$ kan fås godtyckligt litet

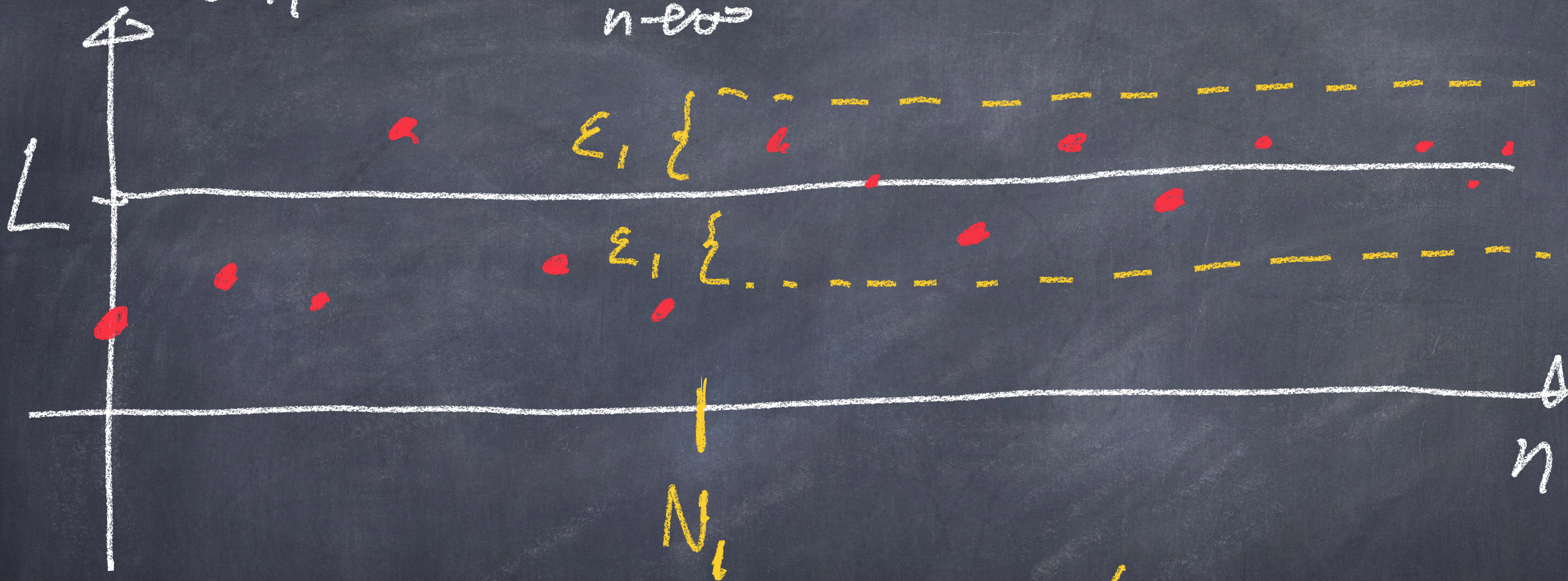
mindre än varje givet $\varepsilon > 0$

för alla tillräckligt stora n "

för alla $n \geq$ något $N = N(\varepsilon)$

a_n

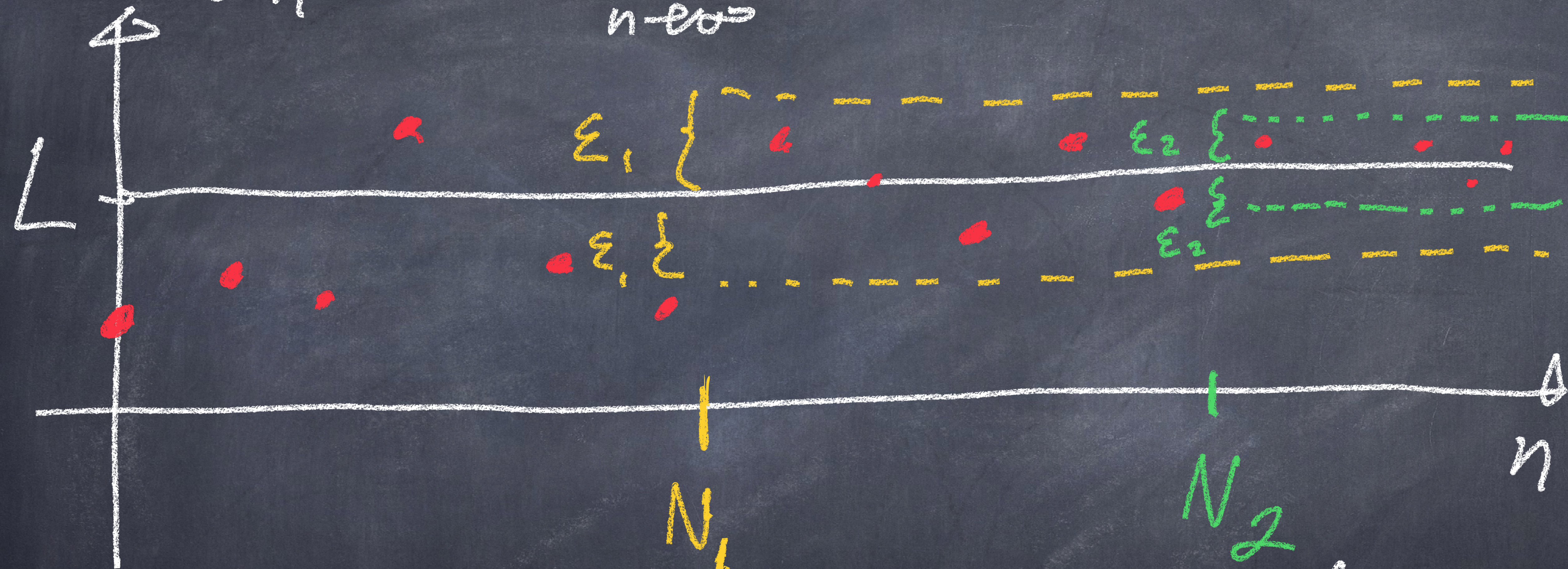
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$



Given $\epsilon_1 > 0$ find N_1 s.a.

$$n \geq N_1 \Rightarrow |L - a_n| < \epsilon_1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$



Given

ϵ_2

$$0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$$

finds

$$N_2 \geq N_1$$

s.t.

$$n \geq N_2 \Rightarrow$$

$$|a_n - L| < \epsilon_2$$

Definition

Talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ har
gränsvärdet L när $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Om det till varje $\varepsilon > 0$

fanns ett $N = N(\varepsilon)$ sådant att

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Exempel: Låt $a_n = \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n}$,

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0, -1/2, 0, 1/4, \dots\}$$

Visa att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Vi ska visa att för varje $\varepsilon > 0$,
så finns ett $N(\varepsilon)$ s.a.

$$\left| \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n} - 0 \right| < \varepsilon \text{ för alla } n \geq N(\varepsilon)$$

$$\left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} - 0 \right| = \frac{\left| \cos \frac{n\pi}{2} \right|}{|n|} \leq \frac{1}{n}$$

Geh $\frac{1}{n} < \varepsilon$ om $n \geq N(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Alltså givet $\varepsilon > 0$, lag heltal $N(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}$.
 De gäller att

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$$

T.ex. $\ddot{a}_v$

$$\left| \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n} \right| < \frac{1}{100} \quad \text{om } n \geq 101$$

$$< \frac{1}{1000} \quad \text{om } n \geq 1001$$

$$< \varepsilon \quad \text{om } n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

helst närmast större än $1/\varepsilon$

Exempel: Visa att $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/3^n) = 1$.

$\forall$ måste visa att för varje

litet tal $\varepsilon > 0$ finns ett $N(\varepsilon)$ s.d.

$| (1 - \frac{1}{3^n}) - 1 | < \varepsilon$ för alla $n \geq N(\varepsilon)$.

Finn $N(\varepsilon)$ s.d. $\left| \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - 1 \right| < \varepsilon$ för alla $n \geq N(\varepsilon)$.

$$\left| \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - 1 \right| = \left| \frac{1}{3^n} \right| = \frac{1}{3^n} < \varepsilon \quad \text{om}$$

$$3^n > 1/\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \log_3 3^n > \log_3 1/\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n > \log_3 1/\varepsilon.$$

Givet $\varepsilon > 0$, tag ett heltal $N(\varepsilon)$
 $N(\varepsilon) \geq \log_3 1/\varepsilon$. Då gäller att

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow n > \log_3 1/3 \xRightarrow[\text{ovan}]{\text{enl}} \left| \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - 1 \right| < \varepsilon$$

Series

Example: $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}$$

n-te Partial Summe till S.

$$S_n = \left\{ \begin{array}{l} \text{geometrisk} \\ \text{summa} \end{array} \right\} = 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2}$$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} \right)$$

enl $\frac{3}{2}$
 föregående 4:6

serie S sägs vara
konvergent med
 summa $S = \frac{3}{2}$.

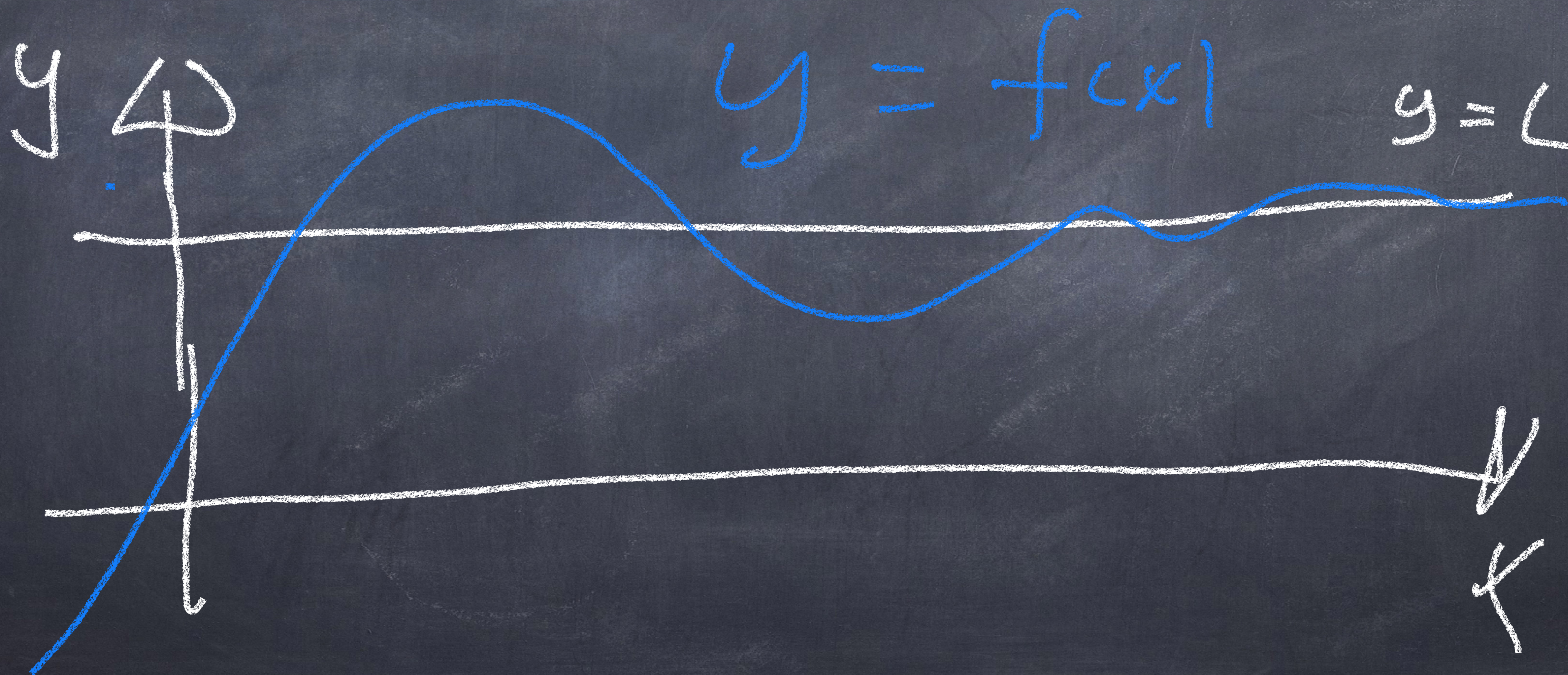
Ex:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k = (1 + 3 + 9 + \dots)$$

$k=0$

is divergent

gränsvärden lim $f(x)$
 $x \rightarrow \infty$

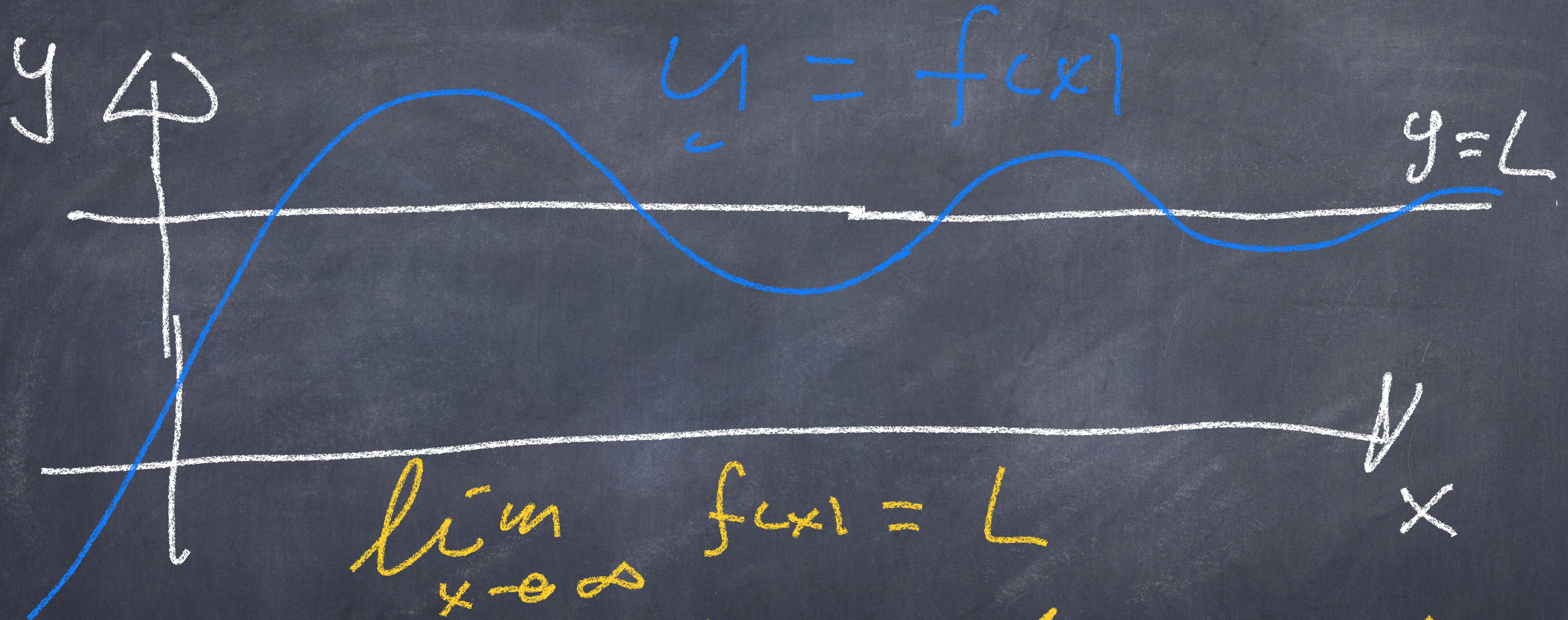


Def. $f(x)$ har gränsvärde L
när $x \rightarrow \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$,

om det en vanje $\varepsilon > 0$

finns $R = R(\varepsilon)$ s.g.

$$x \geq R(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

$\Rightarrow y = L$ är horisontell asymptot

Exempel $y = f(x)$ när $x \rightarrow \infty$

Ex: Vi visar lim $\frac{1}{x^3} = 0$
 $x \rightarrow \infty$

Lösung $\varepsilon > 0$. $\forall i$ will hätte $R = R(\varepsilon)$ s.a.

$$x > R(\varepsilon) \Rightarrow |1/x^3 - 0| < \varepsilon.$$

$$|1/x^3 - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} < \varepsilon \Leftrightarrow x^3 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt[3]{1/\varepsilon} \quad \text{Also kann ich}$$

$$\text{wählen } R(\varepsilon) = \sqrt[3]{1/\varepsilon}.$$

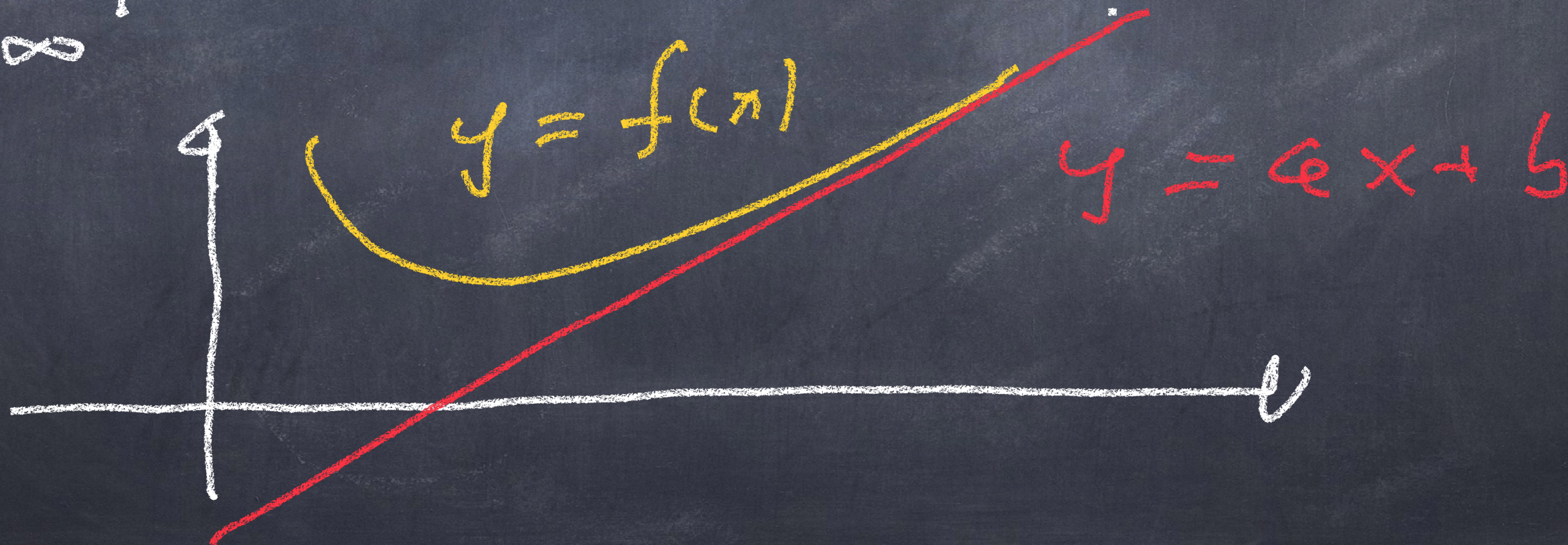
$$y = 1/x^3$$



$y = f(x)$ has an
asymptote $\Leftrightarrow$ $y = ax + b$

def $x \rightarrow \infty$ or

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - (ax + b)| = 0$$



$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{x^2 + 1} = 2x - 3 + \frac{1}{x^2 + 1}$$

polynomial division

asymptote

$$y = 2x - 3$$

will

$$g = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 2}{x^2 + 1}, \quad x \rightarrow \infty.$$

by

$$|f(x) - (2x - 3)| = \frac{1}{x^2 + 1} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Gränsvärden $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

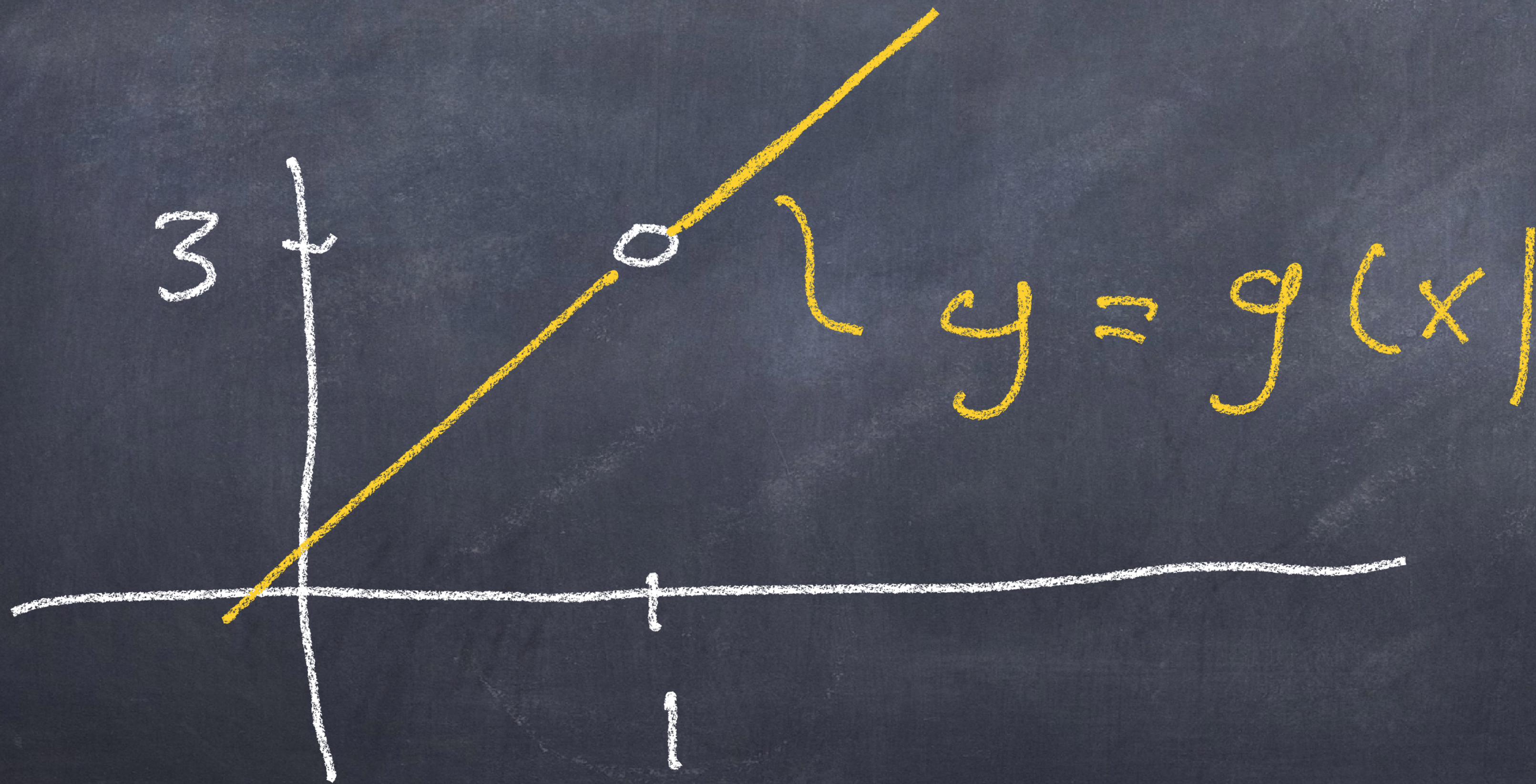
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$



$$\bullet \quad g(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(2x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} \stackrel{\text{d.c.}}{=} (2x + 1) \quad x \neq 1$$



Def: $f(x)$ har gränsvärdet L

då $x \rightarrow a$,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$x \rightarrow a$

om det till varje $\varepsilon > 0$

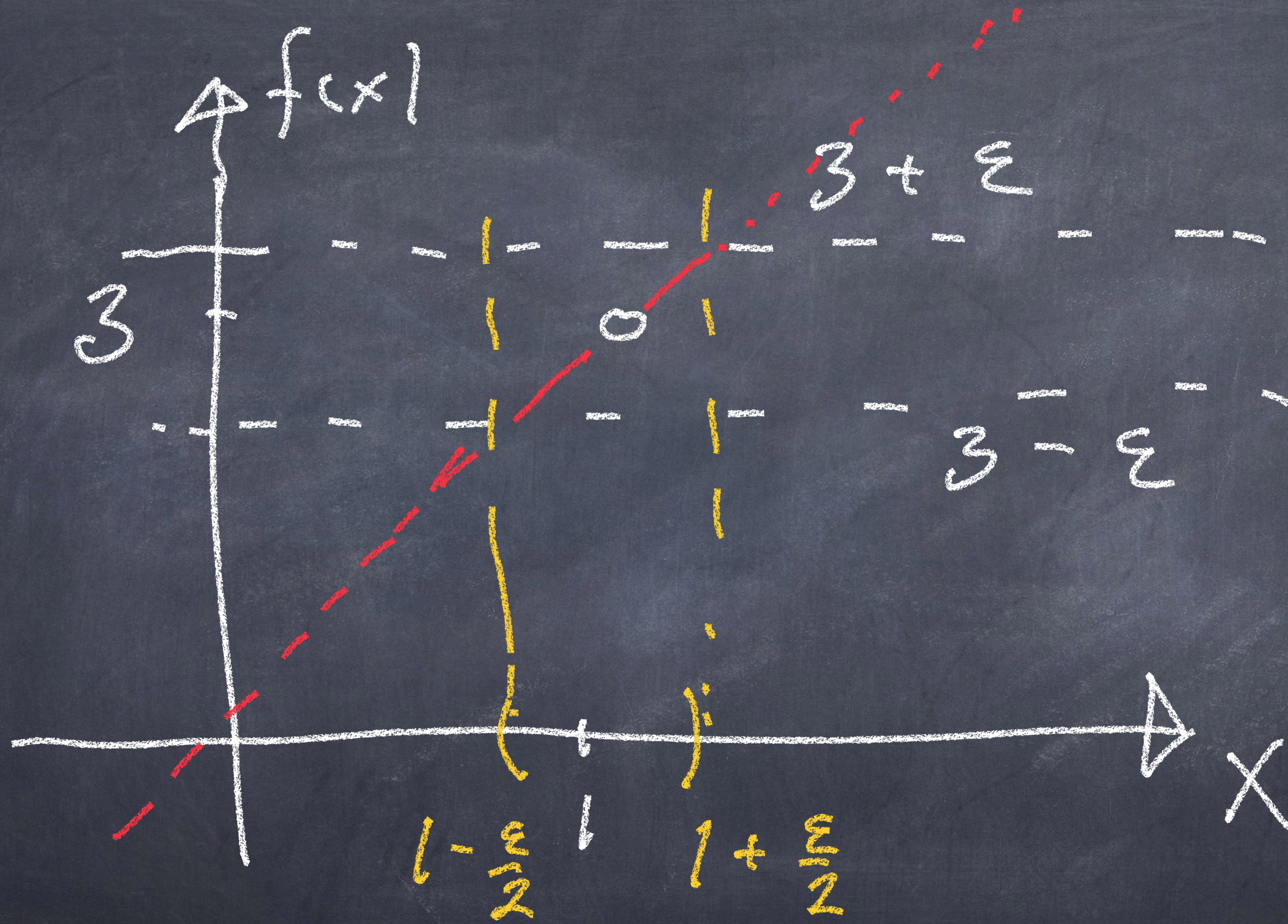
finns ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sådant att

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ex: Låt $g(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$. Visa lim $g(x) = 3$
 $x \rightarrow 1$

Låt $\varepsilon > 0$. Vi ska finna $\delta = \delta(\varepsilon)$
sådant att
 $|g(x) - 3| < \varepsilon$ för alla x så $0 < |x - 1| < \delta$

$$\begin{aligned} |g(x) - 3| &= \left| \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} - 3 \right| = |(2x + 1) - 3| \\ &= |2x - 2| = 2|x - 1| < \varepsilon \quad \text{om } |x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$



Ex: Derivatus definition

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

or $x = x_0 + h$

Visa att om $g(x) = x^2$ så är
 $g'(3) = 6$

$$g'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3+h) - g(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6 \quad \text{Lsg}$$

gegeben $\varepsilon > 0$, Lsg $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$.
 Das gilt auch

$$0 < |h-0| = |h| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|(6+h) - 6| = |h| < \varepsilon$$

