

Föreläsning 13

SF1661 HT 20

1/10

- Exponentiell funktioner

- Logaritmer

- Potensfunktioner

①

"Fakta", räkne regler,
samband, ekvationer m.m.

②

Var hänger det ihop?
Definitioner & teori

a $\swarrow$ base
 b $\searrow$ exponent

Rad means mod

l.e.x $3\sqrt[2]{2}$

Exponential fnk.

$$f(x) = a^x,$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$$

" $\forall$ "
f

a constant

$$a > 0, a \neq 1$$

Logarithm fnk.

$$l(x) = \log_a x$$

$$l: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

a constant

$$a > 0, a \neq 1$$

" $\forall$ "
l

Potential

$$p(x) = x^b$$

l.e.x

$$g(x) = x^{1/3}$$

$$h(x) = x^3$$

$$k(x) = x^{-3}$$

....

Example exponential functions

$$f(x) = 2^x$$

$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$f(x) = 10^x$$

Exponentialfunktioner

$$f(x) = a^x, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad a > 0, a \neq 1$$



- f är strängt monoton $\left(\begin{array}{l} \text{avtagande} \\ \text{växande} \end{array} \right)$
 $\Rightarrow f$ injektiv
- $V_f = (0, \infty)$, f surjektiv
- f är bijektiv, har invers $f^{-1}(x) = \log_a x$

• $\ln x = \log_a(x)$, $l: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 1$
 $(0 < a < 1)$

Ex: $\ln = \ln x$ är invers till $f(x) = e^x$

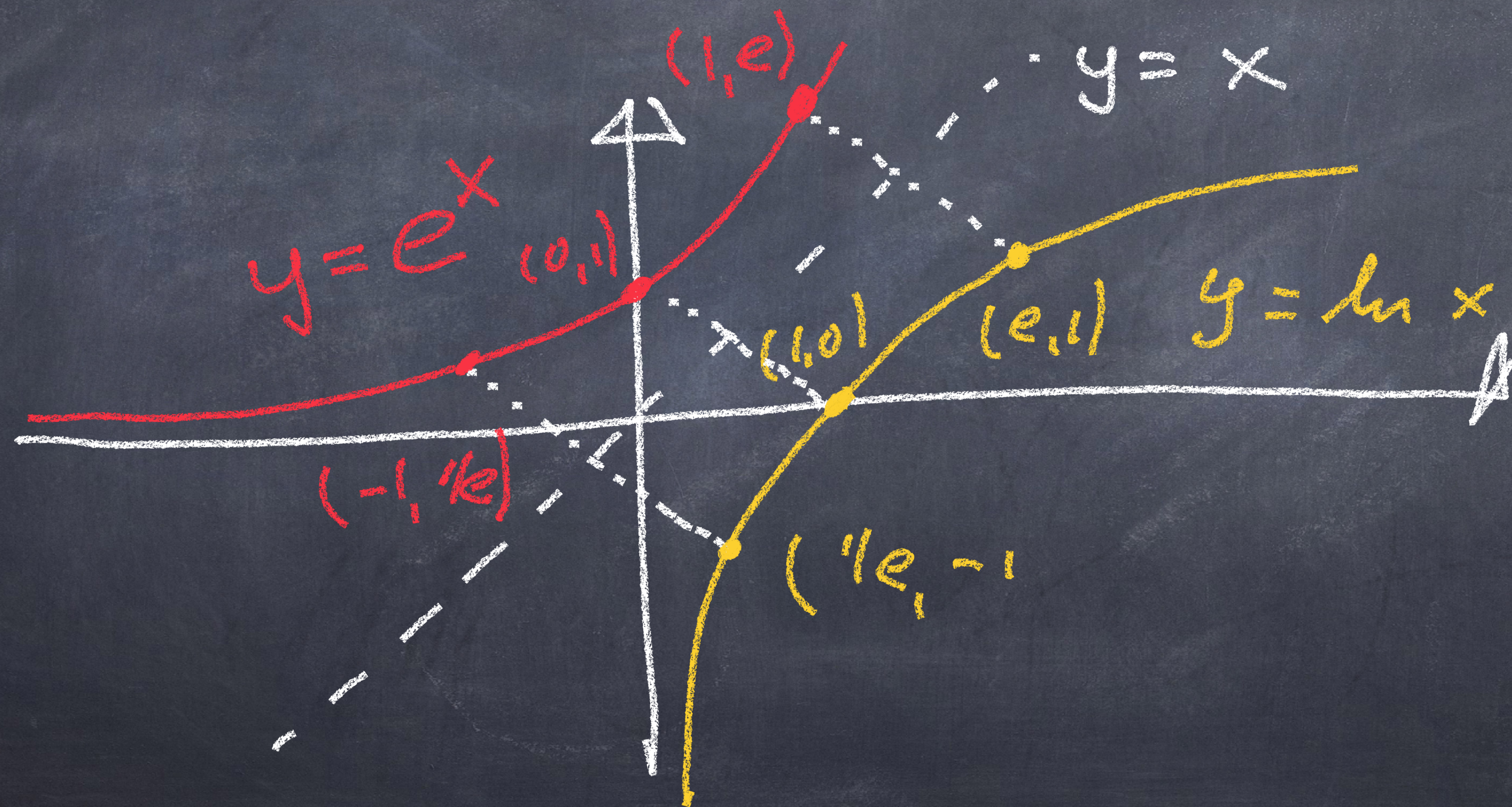
$$f(\ln x) = e^{\ln x} = x, \quad \forall x \in (0, \infty)$$

$$l(f(x)) = \ln e^x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Allmänt: $a^{\log_a x} = x, \quad \forall x \in (0, \infty)$

$$\log_a a^x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

graferna $y = a^x$ och $y = \log_a x$ är
alltså varandras spegelbilder i linjen $y = x$



Ex: • $\lg(x)$ är invers till 10^x .

• $u = 10^V \iff V = \lg u$

• $\lg u$ = "det tal 10 ska upphöjas till för att ge u "

dvs $10^{\lg u} = u$, och $\lg 10^V = V$

Ex: $u = e^V \iff V = \ln u$

Allmänt: $u = a^V \iff V = \log_a u$

• Bestäm

$$\lg(100) = 2 \quad \lg(1000) = 3 \quad \lg\left(\frac{1}{100}\right) = -2$$

• Ange storleksordning på

$$\lg 2 \quad \lg 20 \quad \lg 300$$

$$\lg \frac{1}{100} \quad \lg \frac{1}{10} \quad \lg 1 \quad \lg 10 \quad \lg 100 \quad \lg 1000$$



Anges:

$$\log_4 16 = 2$$

$$\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$$

$$\ln \frac{1}{e} = -1$$

$$\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$$

$$\log_{27} \frac{1}{9} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{tg } 4^2 = 16$$

$$\text{tg } e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\text{tg } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\text{tg } 27^{\frac{2}{3}} = (27^{\frac{1}{3}})^2 = 3^2 = 9$$

$$\text{tg } 27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{9}$$

Potenslagar

(för potens & exponential funkt.)

$$(P1) \quad r^u r^v = r^{u+v} \quad \Rightarrow$$

$$(P2) \quad (r^u)^v = r^{uv} \quad \Rightarrow$$

$$(P3) \quad \frac{r^u}{r^v} = r^{u-v} \quad \Rightarrow$$

$$(P4) \quad (rs)^u = r^u s^u$$

$$r, s \in (0, \infty), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

(samt spec. fall t.ex. $u, v \in \mathbb{N}$
 $r, s \in \mathbb{R}$)

Logaritmlagar

$$(L1) \quad \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$(L2) \quad \log_a x^y = y \log_a x$$

$$(L3) \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$a > 0, a \neq 1$$

$$x, y \in (0, \infty)$$

Exempel på log-logarna

$$(L1): \lg 10^2 \cdot 10^3 = \lg 10^2 + \lg 10^3$$

$$\underbrace{\lg(P1)}_{\lg 10^5 = 5} \quad \underbrace{2}_{2} + \underbrace{3}_{3}$$

$$(L3): \lg \frac{10^5}{10^3} = \lg 10^5 - \lg 10^3$$

$$\underbrace{\lg(P3)}_{\lg 10^2 = 2} \quad \underbrace{5}_{5} - \underbrace{3}_{3}$$

Minnesstöd (2.)

$$(L2) \quad \log_a(x^y) = y \log_a x$$

följer av (L1) om $y \in \mathbb{N}$

$$\log_a x^n = \log_a \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ st}}$$

upprepad
 $\equiv$
 användning
 av (L1)

$$\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x = n \log_a x$$

$n \text{ st.}$

Minneslid (?)

Utgå från (P1), bevisa (L1).

$$(L1) \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Vi visar att $a^{V.L.} = a^{H.L.}$. Eftersom $a^x \parallel a^y$
en injektiv funktion medför det att $V.L. = H.L.$

$$a^{V.L.} = a^{\log_a xy} = xy$$

$$a^{H.L.} = a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy$$

(P1)

V.S.B.

Utgå från (L1) och bevisa (P1)

$$(P1) \quad r^u r^v = r^{u+v}, \quad r > 0, r \neq 1$$

Vi visar $\log_r$ v.l. = $\log_r$ h.l. . Eftersom $\log_r$ är en injektiv funktion följer det att

$$\begin{aligned} \log_r \text{ v.l.} &= \log_r (r^u \cdot r^v) = \log_r (r^u) + \log_r (r^v) \\ &= (u+v) \end{aligned}$$

$$\log_r \text{ h.l.} = \log_r r^{(u+v)} = (u+v). \quad \text{Q.E.D.}$$

Beräkna

$$\lg 27^{1/3} + \frac{\lg 3}{2} + \lg 1/9$$

$$= \lg 3 + \frac{1}{2} \lg 3 + \lg 1/9$$

$$= \lg 3 + \frac{1}{2} \lg 3 + \lg 3^{-2} =$$

$$= \lg 3 + \frac{1}{2} \lg 3 - 2 \lg 3 = -\frac{1}{2} \lg 3 = \lg 3^{-1/2}$$

$$= \lg \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Berechna

(Alternative Lösung)

$$\lg 27^{1/3} + \frac{\lg 3}{2} + \lg 1/9$$

$$= \lg 3 + \frac{1}{2} \lg 3 + \lg 1/9$$

$$= \lg 3 + \lg 3^{1/2} + \lg 1/9$$

$$= \lg (3 \cdot 3^{1/2} \cdot 1/3) = \lg \left(\frac{3^{3/2}}{3^2} \right)$$

$$= \lg \frac{1}{3^{1/2}} = \lg 1/\sqrt{3}$$

Ex: Löse mit $y = y(x)$ or

$$\ln y^2 = x + 3$$

$$e^{\ln y^2} = e^{x+3} \quad \text{OBS.} \quad \neq \quad e^x + e^3$$

$$y^2 = e^{x+3}$$

$$y = \pm \sqrt{e^{x+3}} = \pm \sqrt{e^3} \sqrt{e^x} = \pm e^{3/2} \cdot e^{x/2}$$

Ex: Lö's ekvationen

$$\ln x + \ln(x+4) = \ln(2x+3)$$

Ekv endast def för $x > 0$.

$$\ln x + \ln(x+4) = \ln(2x+3)$$

$$\ln(x^2+4x) = \ln(2x+3)$$

$$x^2+4x = 2x+3$$

$$\Rightarrow x^2+2x-3=0$$

$$\Rightarrow x = -3 \vee x = 1$$

~~för $x < 0$~~

~~$x < 0$~~

Sv: $x = 1$

$\Rightarrow$
(om $x > 0$)
 $\Rightarrow$

Exponential funktioner & logaritmer

— definitioner & begrepp

Hur definieras egentligen e & x ?

$3^{2/7}$, $5^{\sqrt{2}}$, $\log_3 5$

a^b "enkelt" att def. för

$a \in \mathbb{R}$ $a > 0$ och $b \in \mathbb{Q}$:

- för $b \in \mathbb{N}$ $a^b \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ st.}}$

ger (P1)-(P3) för exponenter i $\mathbb{N}$

- def $a^0 \stackrel{*}{=} 1$ och $a^{-b} \stackrel{*}{=} \frac{1}{a^b}$, $b \in \mathbb{N}$

- def $a^{p/q} \stackrel{*}{=} \sqrt[q]{a^p}$, $p, q \in \mathbb{N}$

$a^{-p/q} \stackrel{*}{=} \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$

(*) enda möjlig def. om (P1-P3) ska gälla.

svårare att def a^b , $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
och att def $\log_a x$

Tre alternativa vägar - en orientering

(I) Först a^x , $x \in \mathbb{R}$,
sedan $\log_a x$ som invers

(II) Först $\ln x = \int \frac{1}{t} dt$
sen e^x som dess invers, sen a^x , sen $\log_a x$

(III) Först $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
sedan $\ln x$ som dess invers, sen a^x , sen $\log_a x$...

(A1b
I)

• a^r är def för $r \in \mathbb{Q}$, $a \geq 0$, $(a \neq 1)$

• $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kan approximeras

med rationella tal,

$$\{r_k\}_{k=1}^{\infty} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$$

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k$$

$$a^x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} a^{r_k}$$

• Visa $f(x) = a^x$ uppfyller (P1)-(P4)

• Visa att $f(x) = a^x$ är
inverterbar.

• Kallas inversen $\log_a x$

• Visa att $(L1) - (L3)$

m ha $P1 - P3$ och

att a^x och $\log_a x$ är inverser.
växande

Alt II. a^r är def för $r \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, $(a \neq 1)$

• def sedan

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}, x > 0.$$

$x > 1$



$0 < x < 1$



• Visa att $\ln x$ uppfyller (L1-L3)

• Visa att $\ln x$ strikt växande

$\Rightarrow \ln x$ inverterbar.

• Låt $\exp(x)$ vara invers
och sätt $e \stackrel{\text{def}}{=} \exp(1)$ (~~$\ln e = 1$~~)

• Visa att $\exp(r) = e^r$, $r \in \mathbb{Q}$

och def. $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \exp(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

• Visa att e^x uppfyller (P1-P3)

• När nu $\ln x$ och e^x är def. sätt

$$a^x \stackrel{(\text{def})}{=} e^{x \ln a} = e^{\ln a^x}$$

användbar omskrivning!

• Visa a^x är inverterbar, $x \in \mathbb{R}$

och låt $\log_a x$ vara def.

Som dess invers

Alk
III

Se också i Envariabel-
analys

Börja med att definiera

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

för $x \in \mathbb{R}$

Måste definiera
- oändlig många
termer!

• Visa e^x uppfylla (P1)-(P3)
och är invertierbar
CSV.

Potensfunktioner

$$f(x) = x^r, \quad x \geq 0, r \in \mathbb{R}$$

För vissa spec. funktioner
kan def.-mgd vara stävve

t.ex $f(x) = x^3$ def. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^n$$

$$n \in \mathbb{N}$$

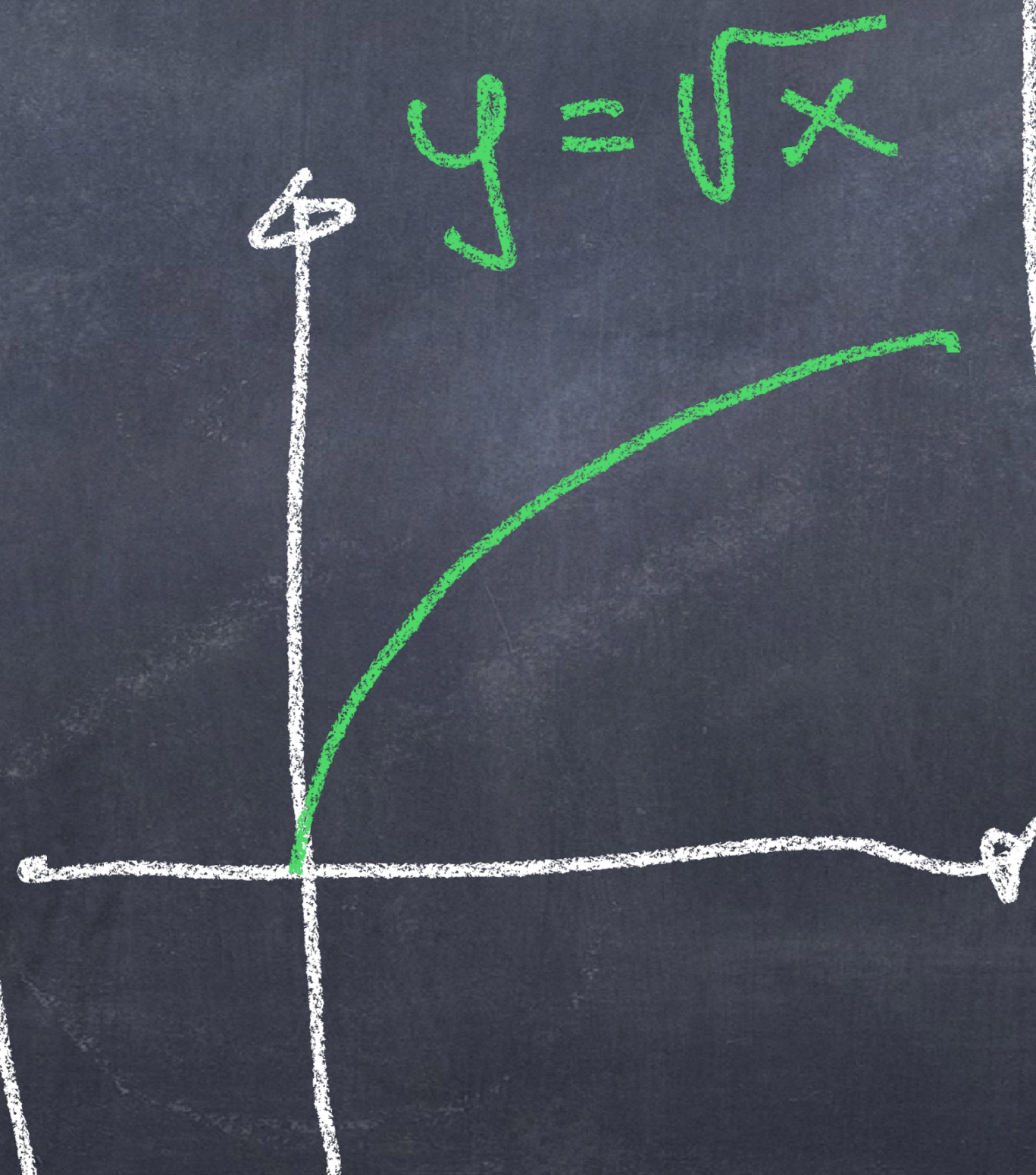
monom

(polynom med
1 term)

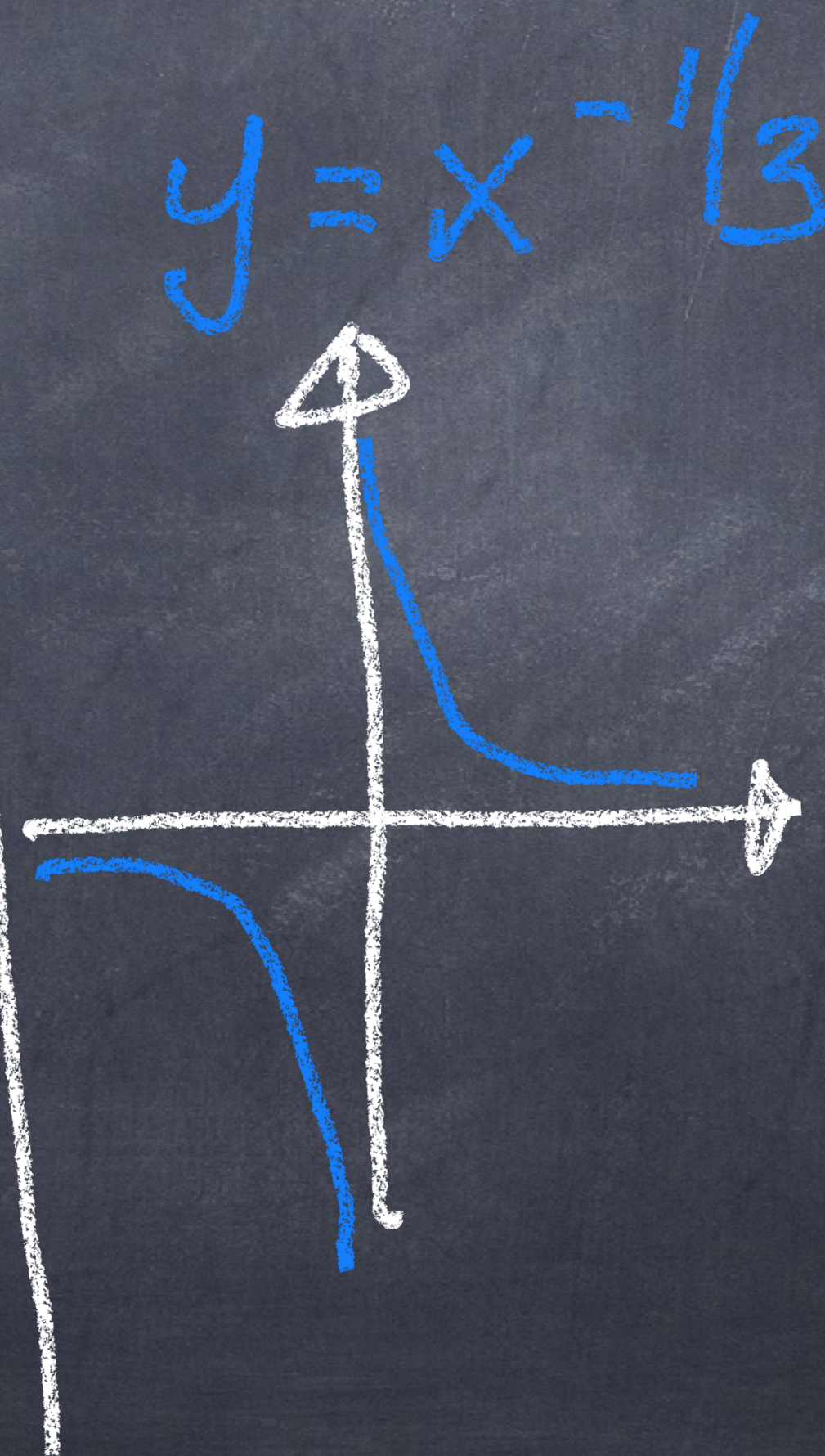
$$y = |x|^n \quad n \text{ jämnt}$$

$$y = x^n \quad n \text{ udda}$$

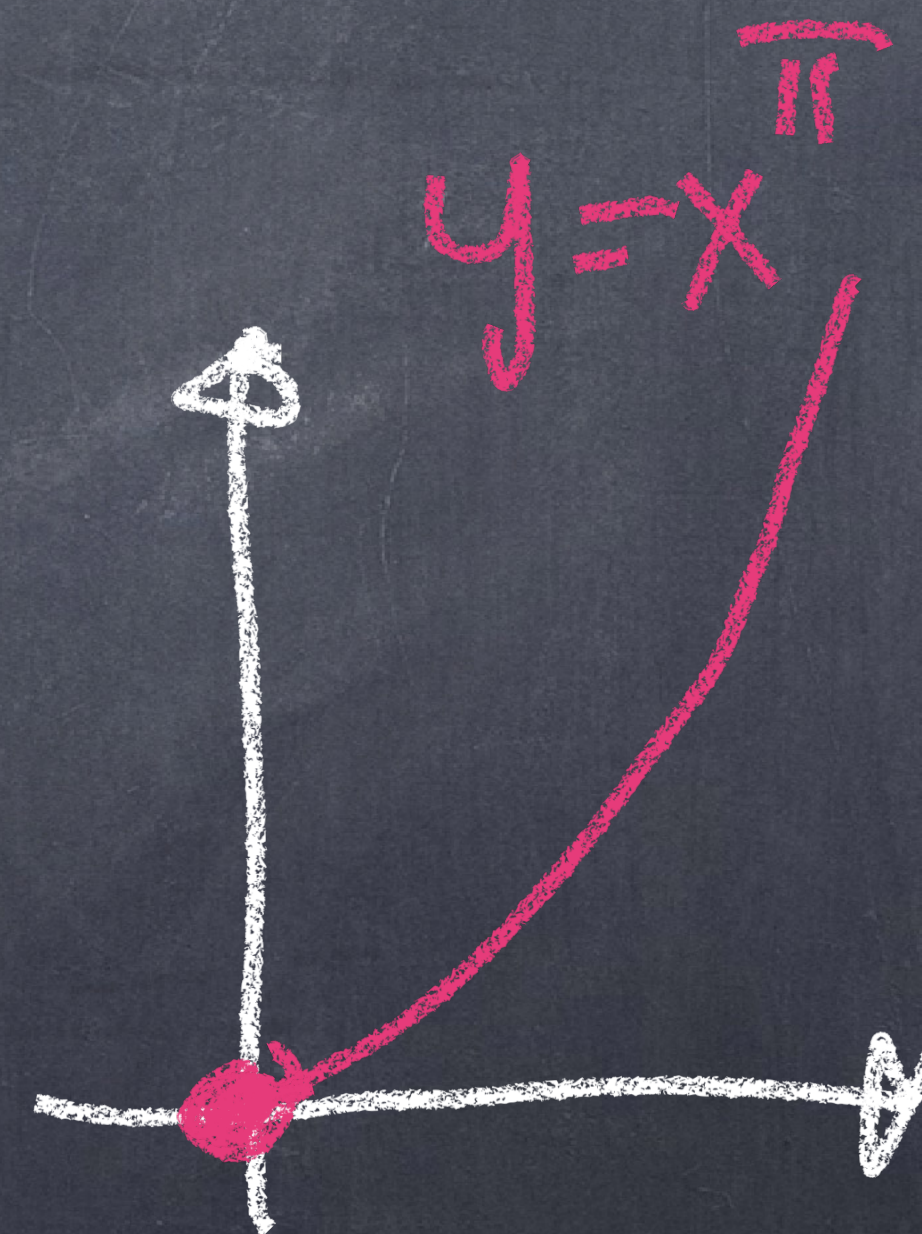
$$f(x) = x^{1/2} \\ = \sqrt{x} \\ x \geq 0$$



$$f(x) = x^{-1/3} \\ = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x \neq 0$$



$$f(x) = x^\pi \\ = e^{\pi \cdot \ln x} \quad x > 0$$



$$f(x) = x^r, \quad x > 0, \quad r \in \mathbb{R} \\ r \neq 0$$

"
är inverterbar

och har invers $f^{-1}(x) = x^{1/r}$

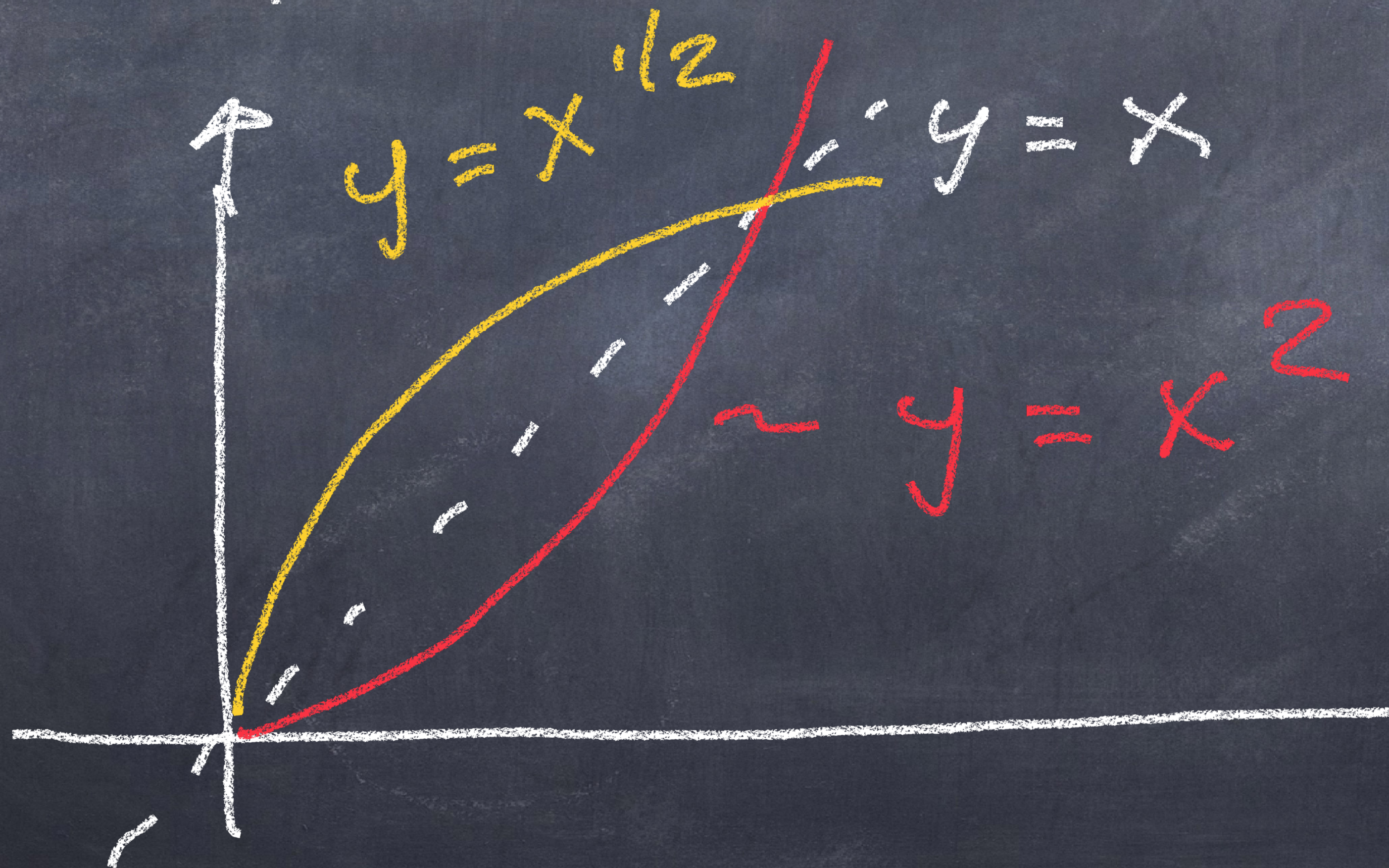
visa detta!

$$f(f^{-1}(x)) = f(x^{1/r}) = (x^{1/r})^r = x^{r \cdot \frac{1}{r}} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^r) = (x^r)^{1/r} = x^{r \cdot \frac{1}{r}} = x$$

Exempel $f(x) = x^{1/2}, x \geq 0$

$$f^{-1}(x) = x^{1/1/2} = x^2$$



Exempel: $g(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

är def för $x \neq 0$.

$$g^{-1}(x) = x^{-1/3} = \frac{1}{x^{1/3}}$$

$$g(g^{-1}(x)) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^{1/3}}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

$$g^{-1}(g(x)) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^3}\right)^{1/3}} = x$$

$x^{\left(\frac{-1}{(3)}\right)}$

×

$x^{(-3)}$

×

x

×

A graph on a coordinate plane showing the functions $y = x$ and $y = x^{-3}$. The x-axis ranges from -10 to 10, and the y-axis ranges from -10 to 15. The function $y = x$ is a solid green line passing through the origin. The function $y = x^{-3}$ is a blue curve with a vertical asymptote at $x = 0$ and a horizontal asymptote at $y = 0$. The two curves intersect at the origin $(0, 0)$ and at the points $(1, 1)$ and $(-1, -1)$. A dashed yellow line segment connects the points $(1, 1)$ and $(5, 1/125)$ on the blue curve. Handwritten labels in blue, green, and red ink are present on the graph.

x	y = x	y = x ⁻³
-10	-10	-1000
-5	-5	-1/125
-1	-1	-1
0	0	undefined
1	1	1
5	5	1/125
10	10	1/1000

$y = x$

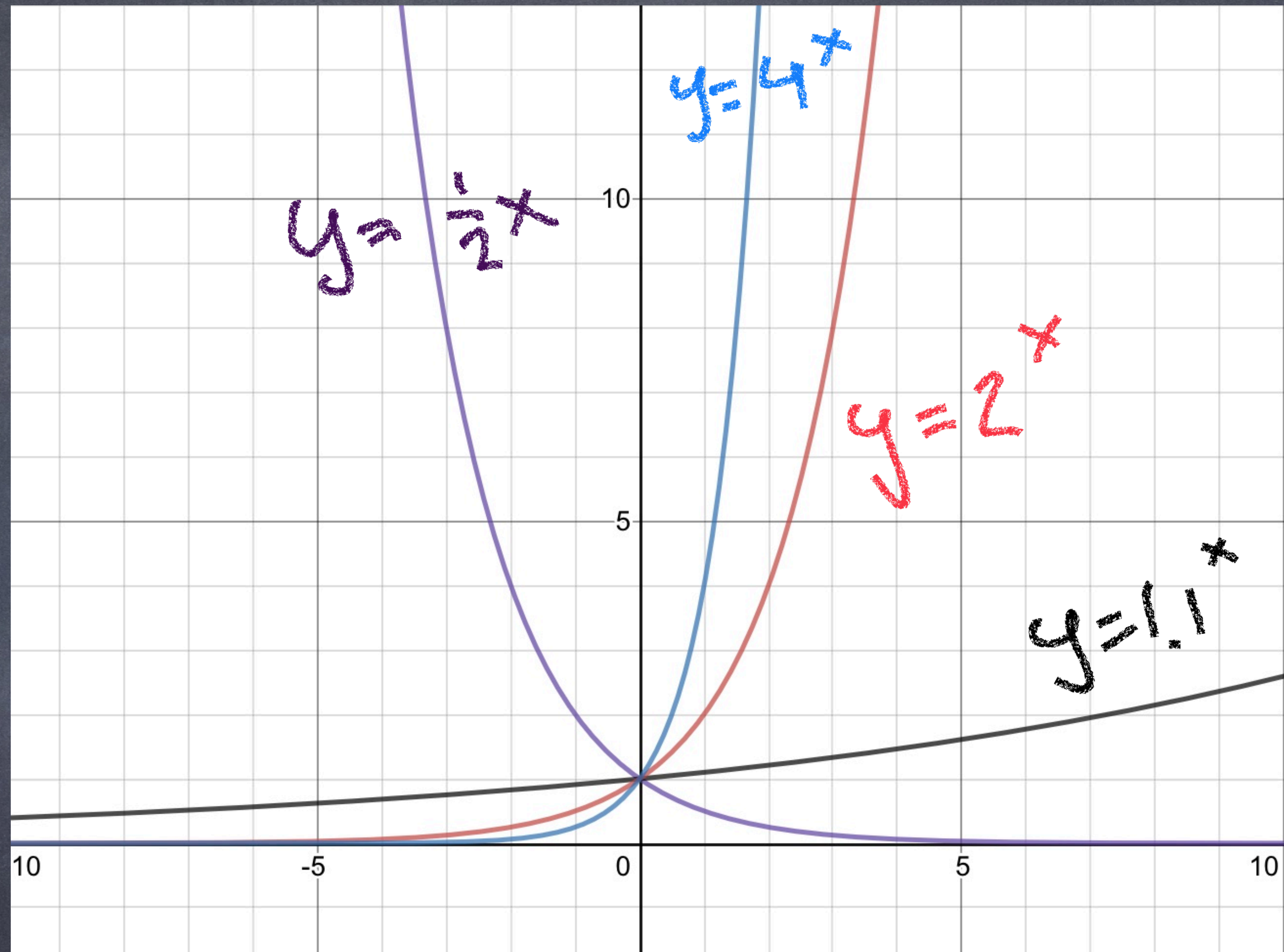
$y = x^{-1/3}$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 2$$

$$y = (1.1)^x$$

$$y = 2^x$$

$$y = 4^x \cdot 2$$



2.
 $y = \lg x$

$$y = \ln x$$

$$y = \log_{1/2} x$$

2.

