

Föreläsning 12

SF1661 HT20

30/9

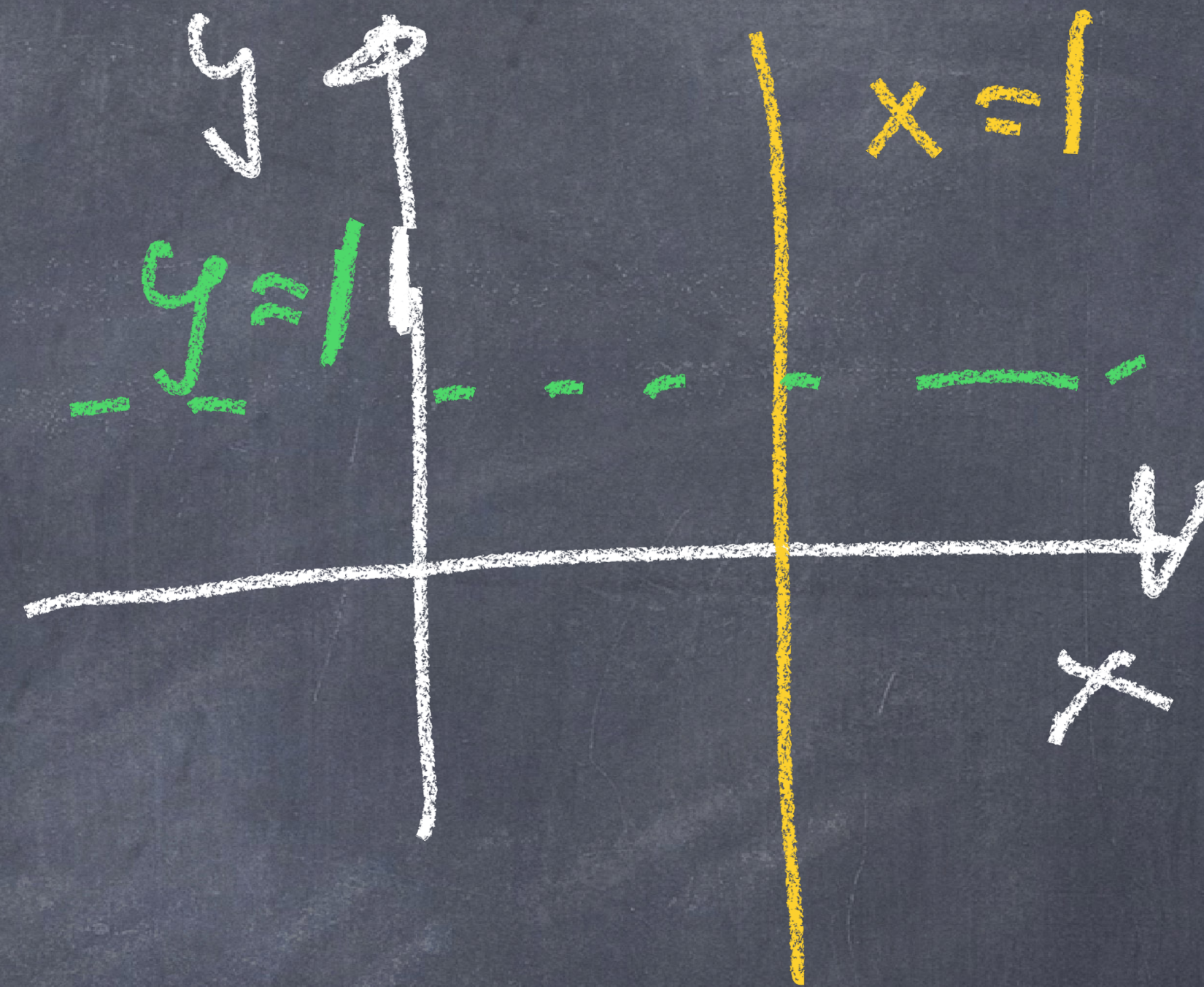
Funktionsbegreppet är
centralt i matematiken

men vad är en funktion
egentligen?

Diskussion i FB-grupp för MA-lärare

- Är $x=1$ en funktion?

- Ja, eftersom $y=1$ är en funktion borde även $x=1$ vara en funktion



- Nej, det får bara finnas ett y -värde till varje x -värde

- Om det ska vara en funktion
- Jo, man se x som en funktion $x(y)$.

Vissa funktioner kan
visualiseras/repreresenteras

av en graf i xy -planet,

men begreppet är mycket
vidare än så.....

Ex: 0 m $z = x + iy \in \mathbb{C}$ "a"

$$w = f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

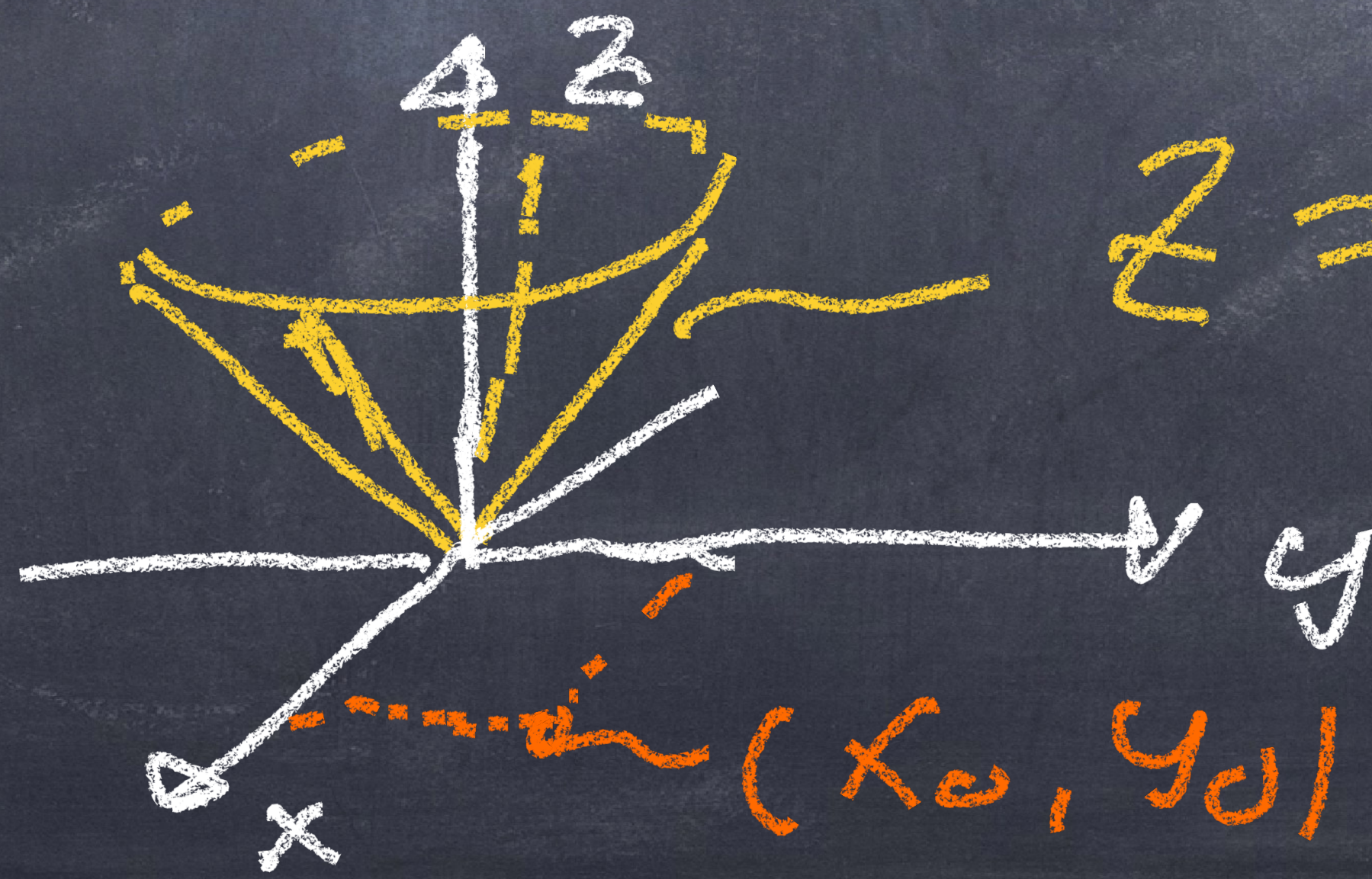
$$= (e^x \cos y) + i(e^x \sin y)$$

en funktion med "input"

från komplexa talplanet och

"output" i komplexa talplanet.

Ex: Om $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
är d en funktion med input
som är punkter i (x, y) -planet
och "output" som är reella tal ≥ 0



Ex: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ • Funktioner har en Definitions mängd

Endast definierad för $x > 0$
(om $f(x)$ ska vara ett reellt tal)

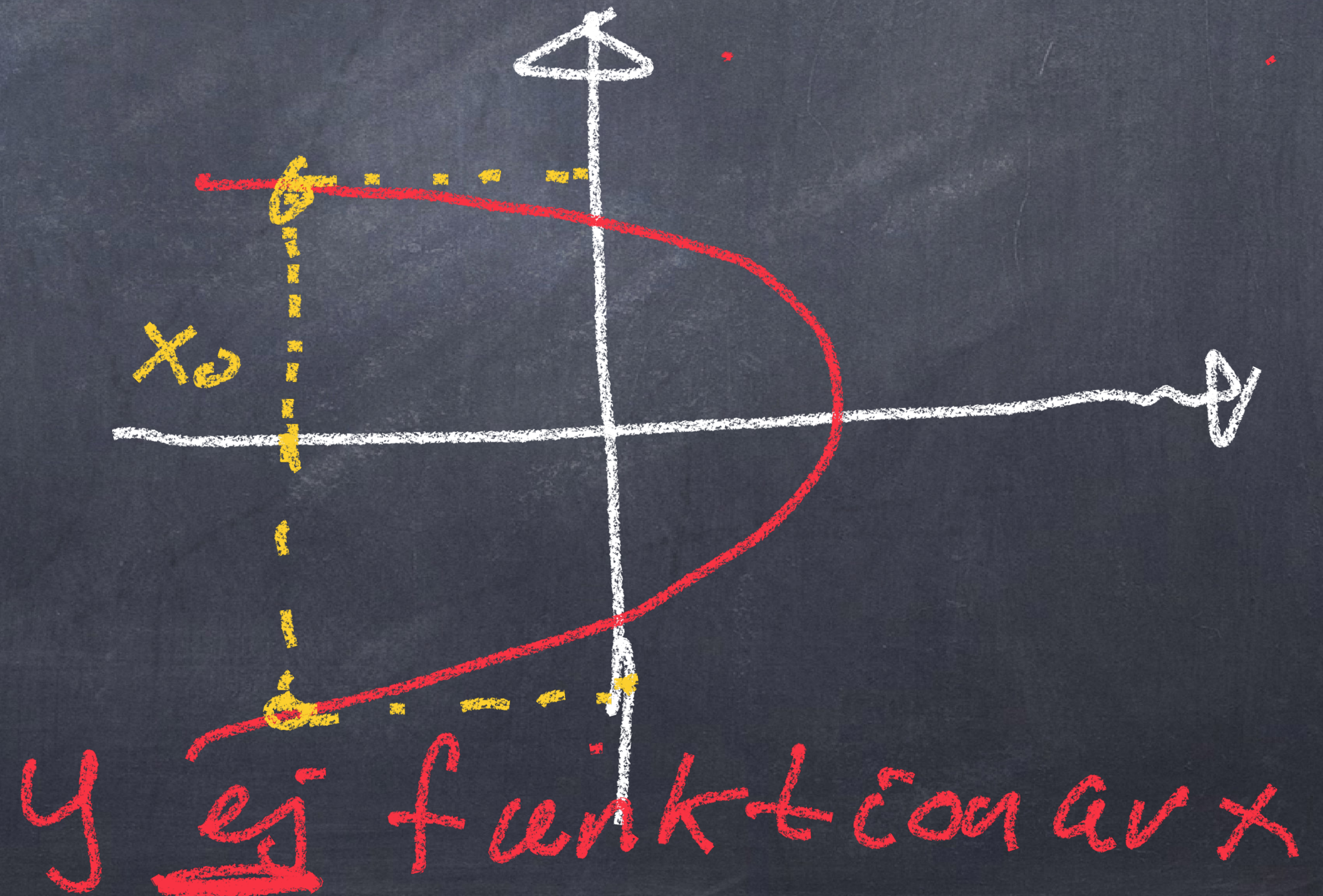
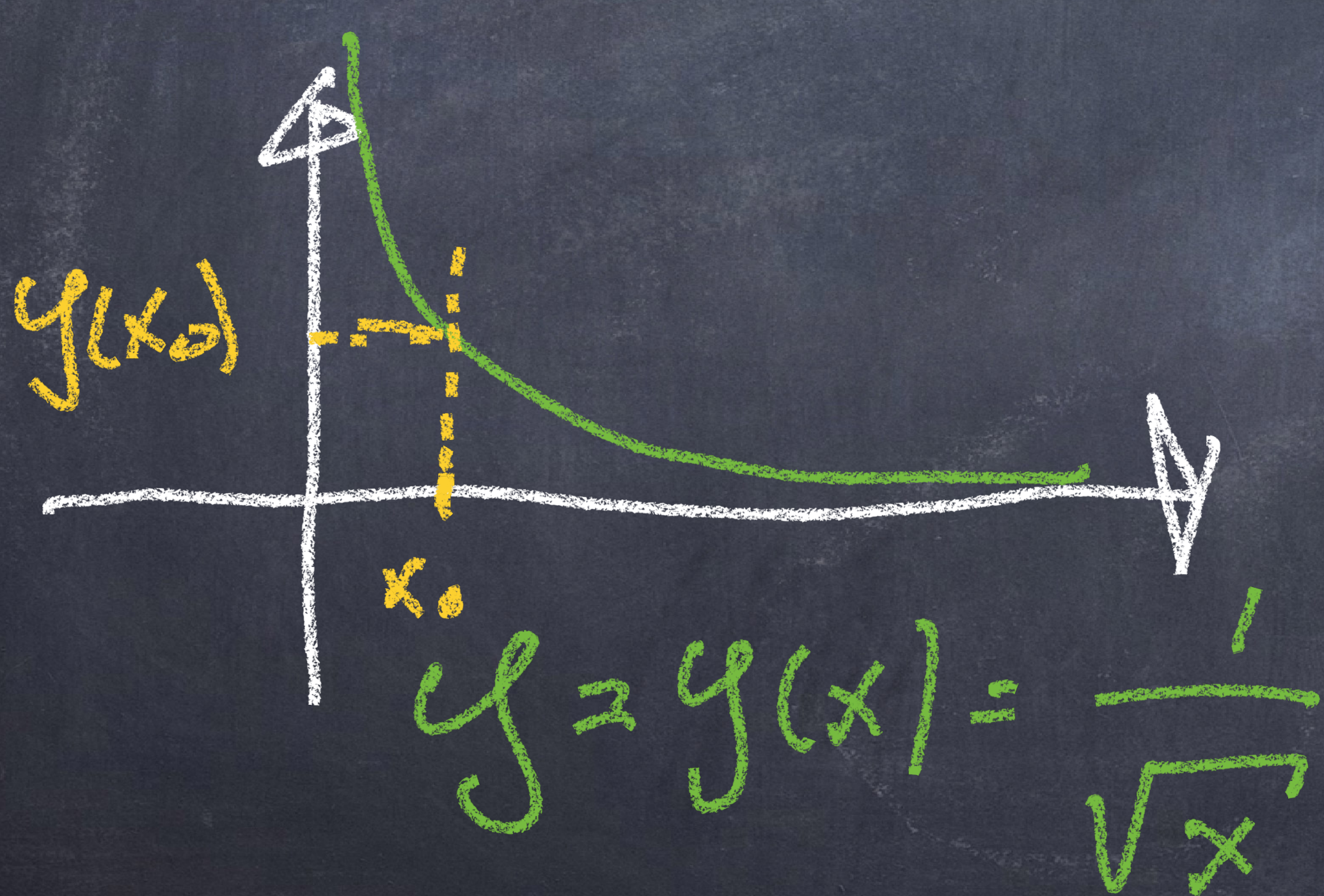
Ex: Arean av en cirkel med radie
 r ges av

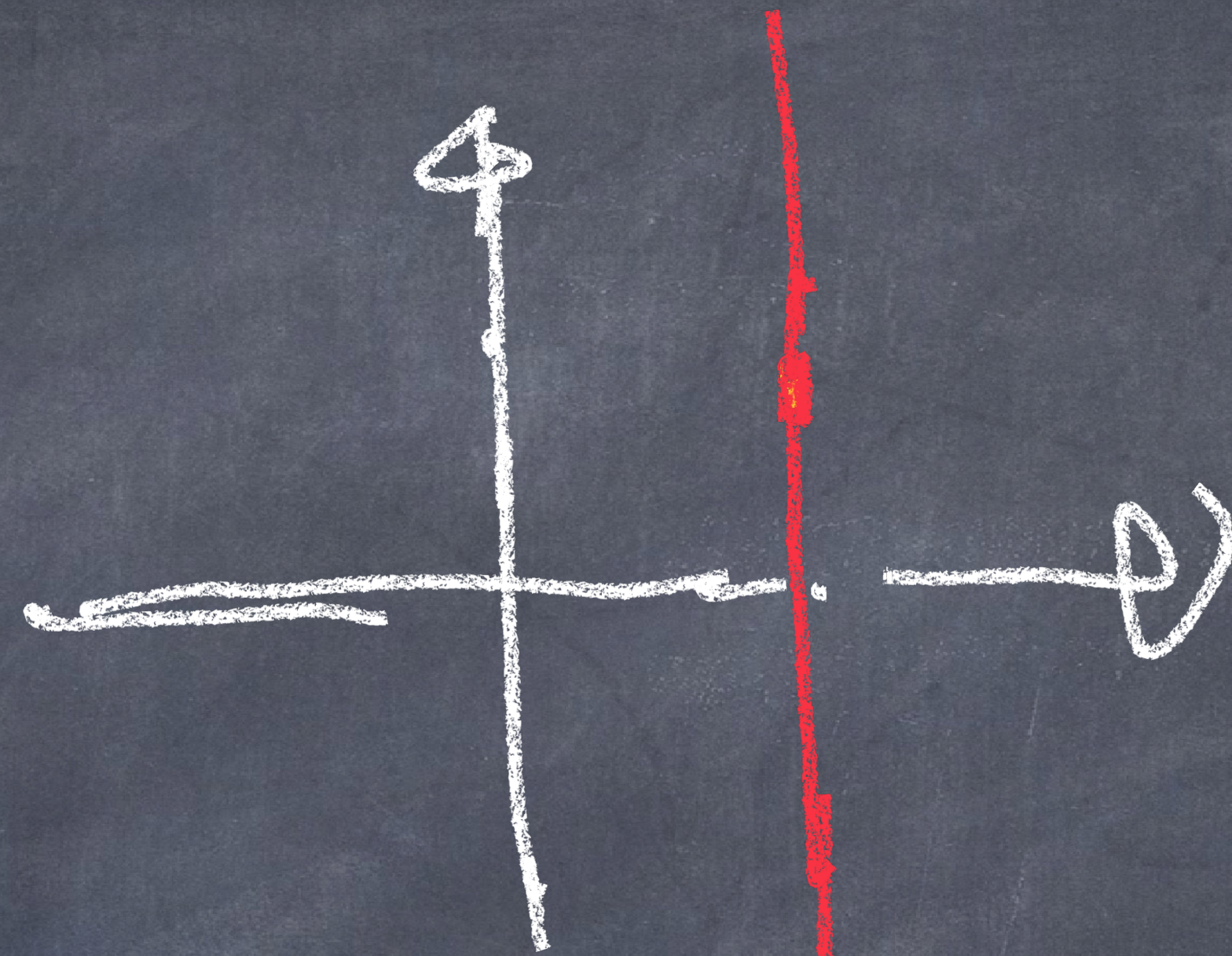
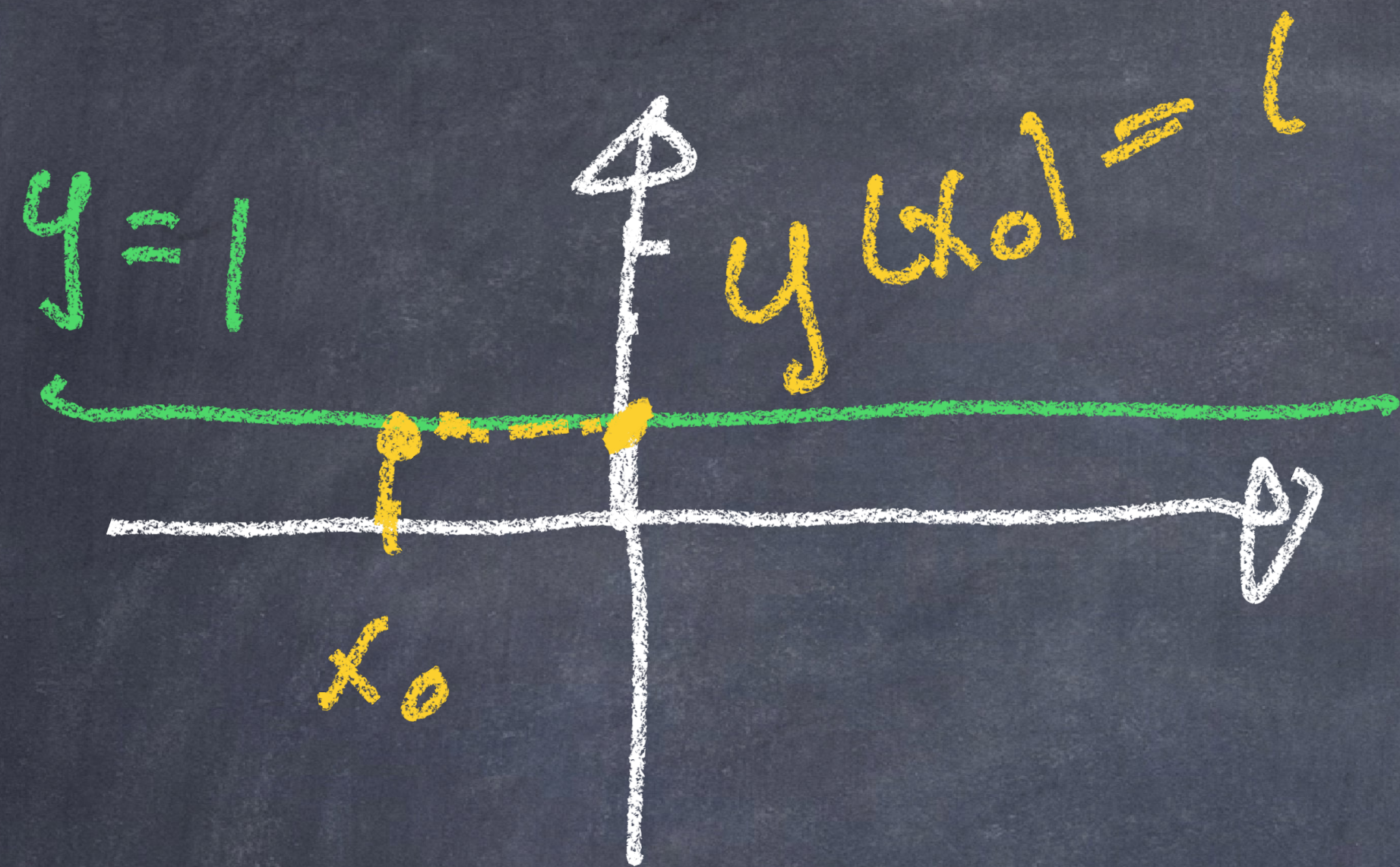
$A(r) = \pi r^2$, endast def. för $r \geq 0$

(t.g. $r = \text{radie} \geq 0$), även om

uttrycket πr^2 är def. för $r < 0$

Till varje "input" från definitions-
mängden ska funktionen ge
ett och endast ett "output"



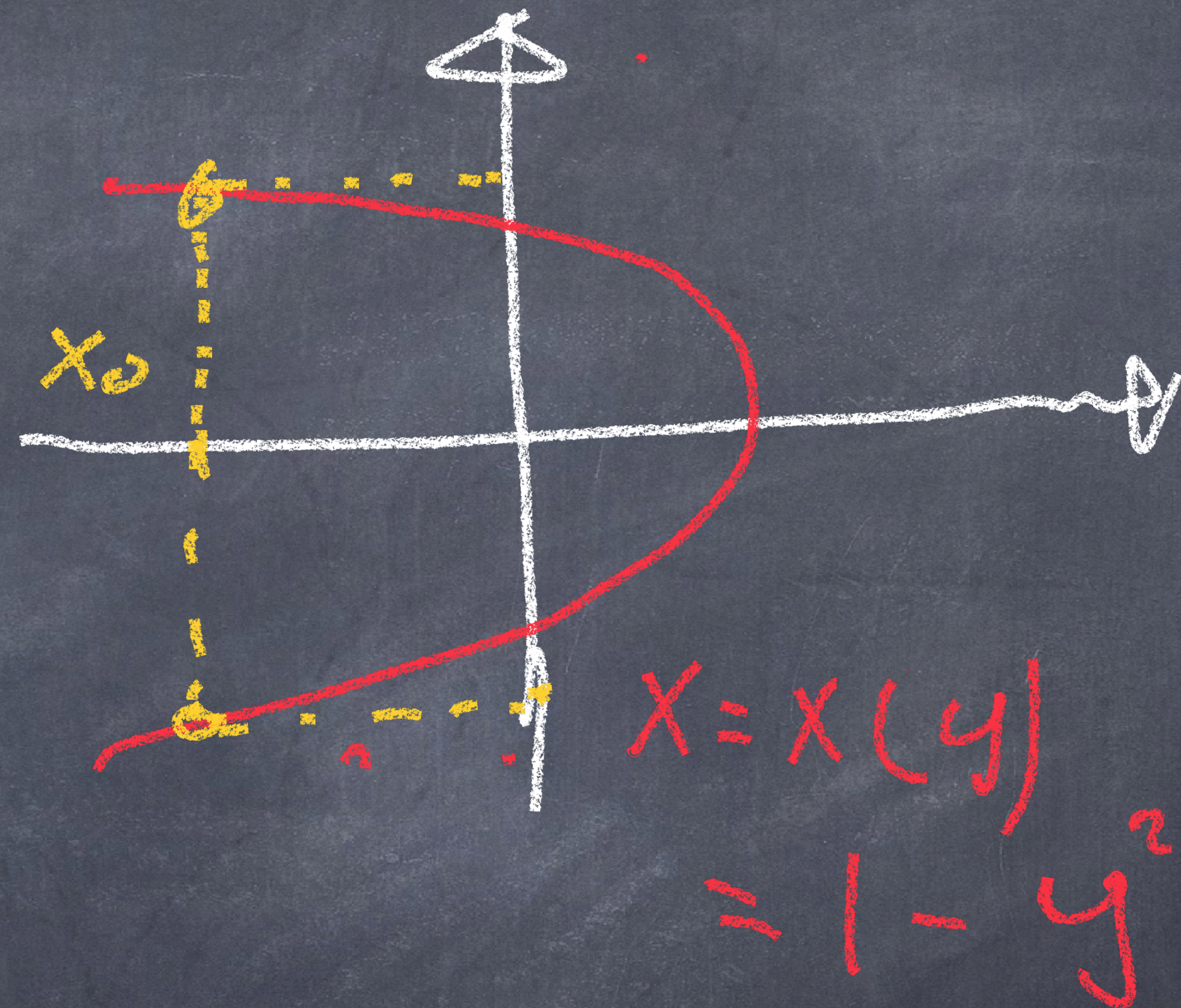
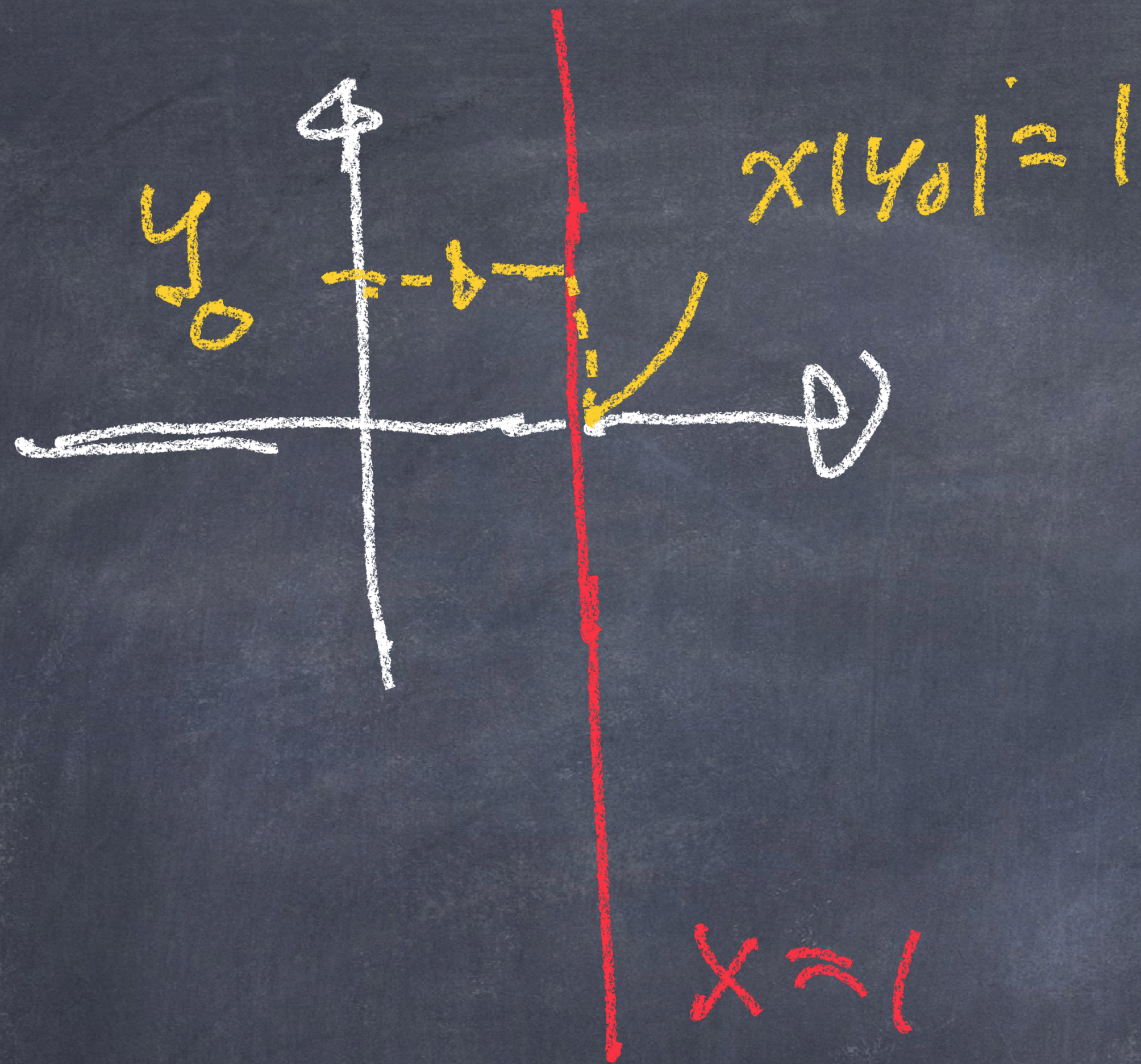


$$y = y(x) = 1, \forall x$$

är en funktion
av x

$$x=1$$

ej funktion av x



MEN $x = x(y)$

Definition: En funktion $f: S \rightarrow T$
är en regel som till varje $x \in S$
ger precis ett $y = f(x) \in T$.

S är funktionens definitionsområde
och skrivs också $S = \overline{Df}$.

T är funktionens målbild.



Ex: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, f(z) = |z|.$

$= D_f$, definitions mængde $\searrow$ mål mængde

Ex: $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \pi(n) = \text{antal primtal} \leq n$

$\searrow$ mål mængde

D_π , definitions mængde

Definition: Om $f: S \rightarrow T$
är värdeområdet V_f

den delmängd av målmängden T ,
 $V_f \subseteq T$, som ges av

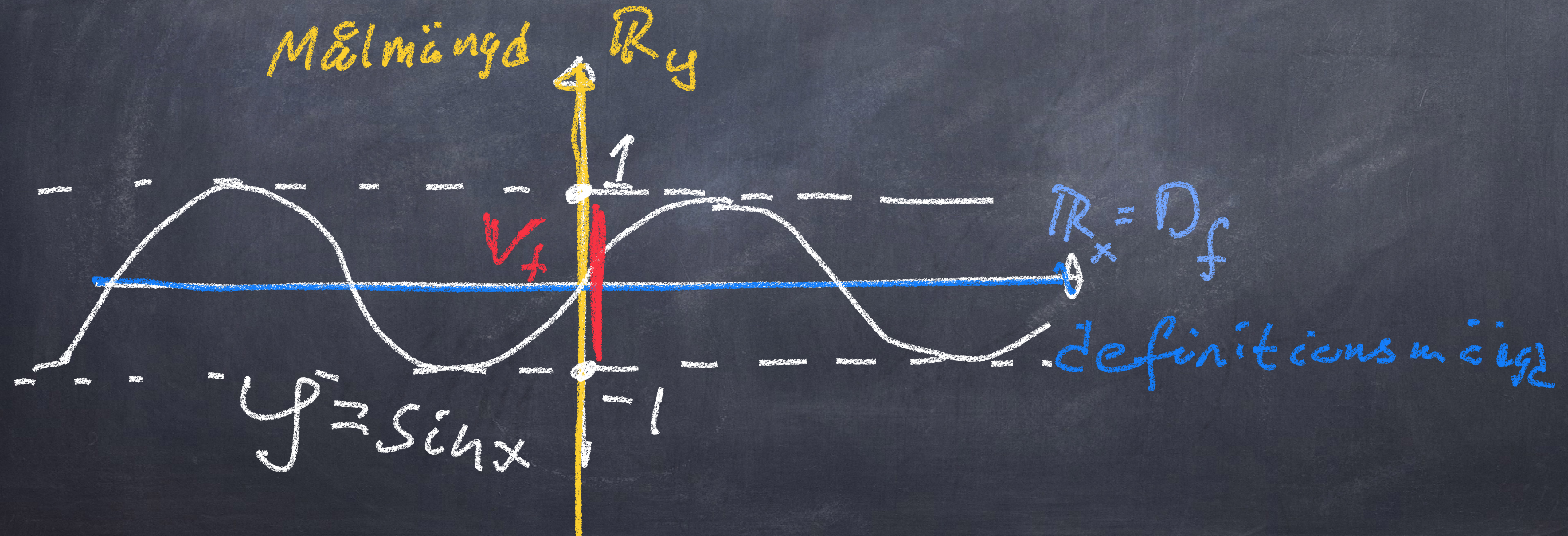
$$V_f = \{ y \in T : y = f(x), \text{ ngt } x \in S \}$$



Ex: $f: \mathbb{R}_x \rightarrow \mathbb{R}_y, f(x) = \sin x$

$D_f = \mathbb{R}_x, V_f = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}_y$

Mälmängd $\mathbb{R}_y$



För alla funktioner $f: X \rightarrow Y$

gäller att

$$f(a) \neq f(b) \Rightarrow a \neq b$$

$$(\text{dvs } a = b \Rightarrow f(a) = f(b))$$

Den omvända implikationen

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$(\text{dvs } f(a) = f(b) \Rightarrow a = b)$$

är en speciell viktig egenskap

som bara gäller för vissa funktioner.

Def: $f: \underline{X} \rightarrow Y$ är en
injektion (eller injektiv funktion)

om

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

(eller ekvivalent
 $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$)

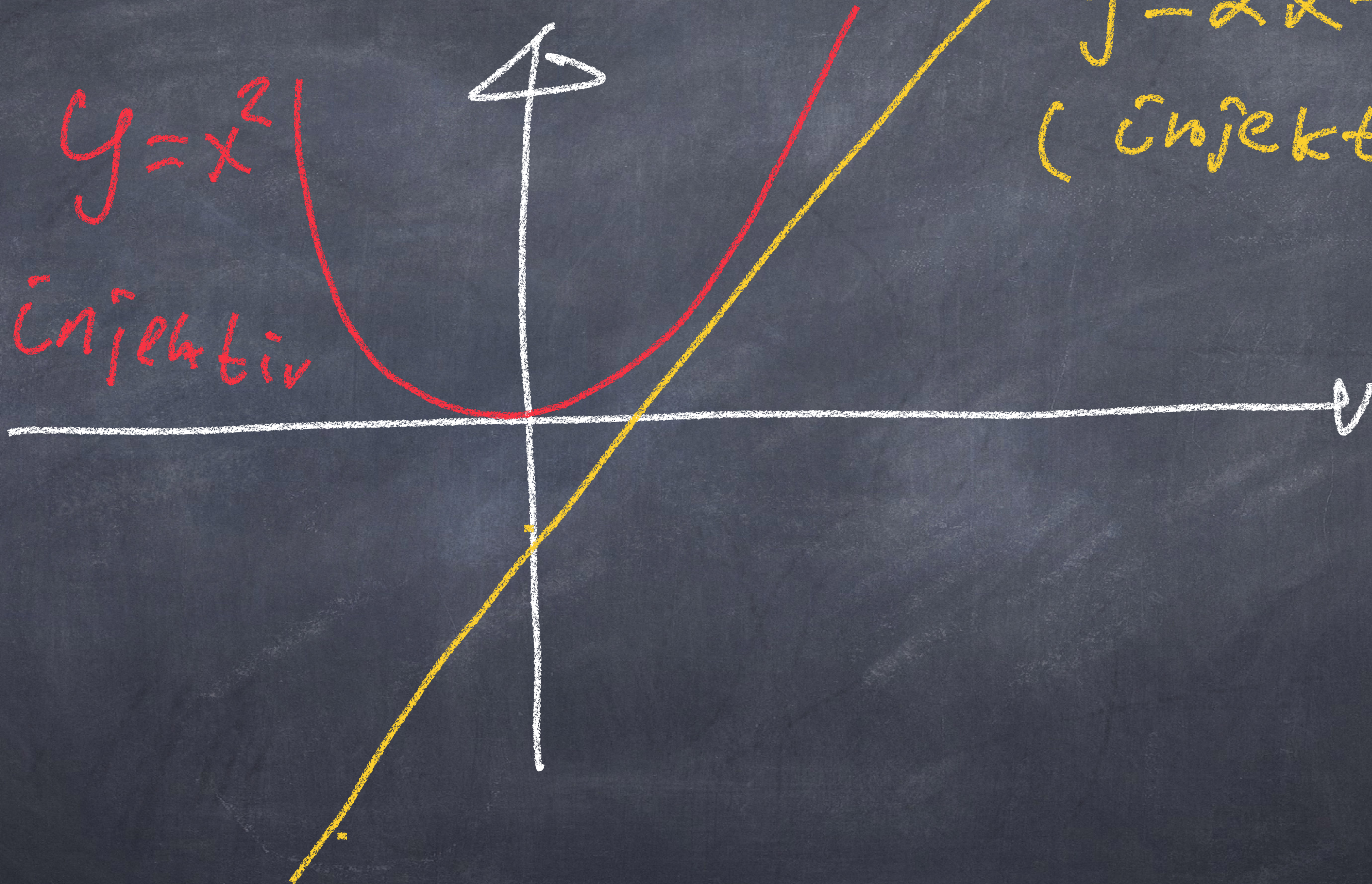
Exempel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$
är en injektion, t.g.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow 2a - 1 = 2b - 1 \Rightarrow 2a = 2b \\ \Rightarrow a = b$$

Exempel: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$
är inte injektiv t.g.

$$\text{t.ex. } g(1) = g(-1), \quad 1 \neq -1.$$

es
 $y = x^2$
injektiv



$y = 2x - 1$
(injektiv)

Definition: $f: X \rightarrow Y$ kallas
en surjektion (eller en surjektions
funktion) om $V_f = Y$.

dvs. om det till varje
 $y \in Y$ finns ett $x \in X$
s.a. $y = f(x)$.

Exempel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

är inte surjektiv, t.ex. finns

inget $x \in \mathbb{R}$ s.a. $f(x) = 2$.

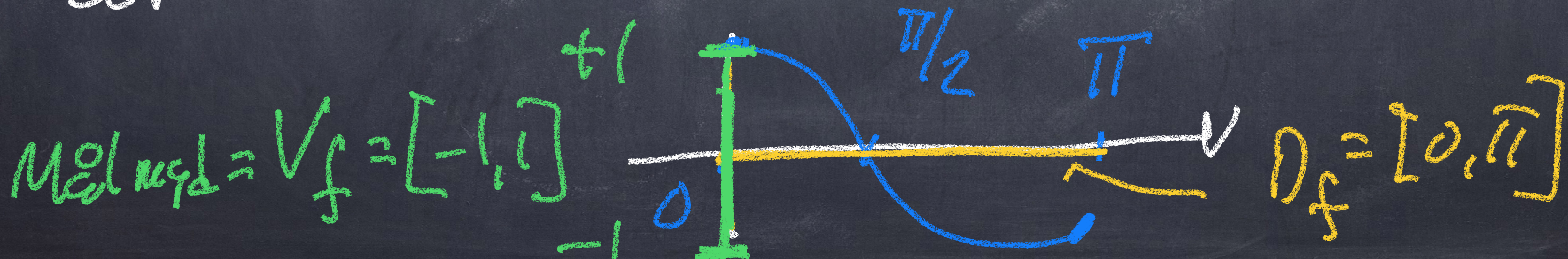
genom att inskränka målmängden
för vi en surjektion.

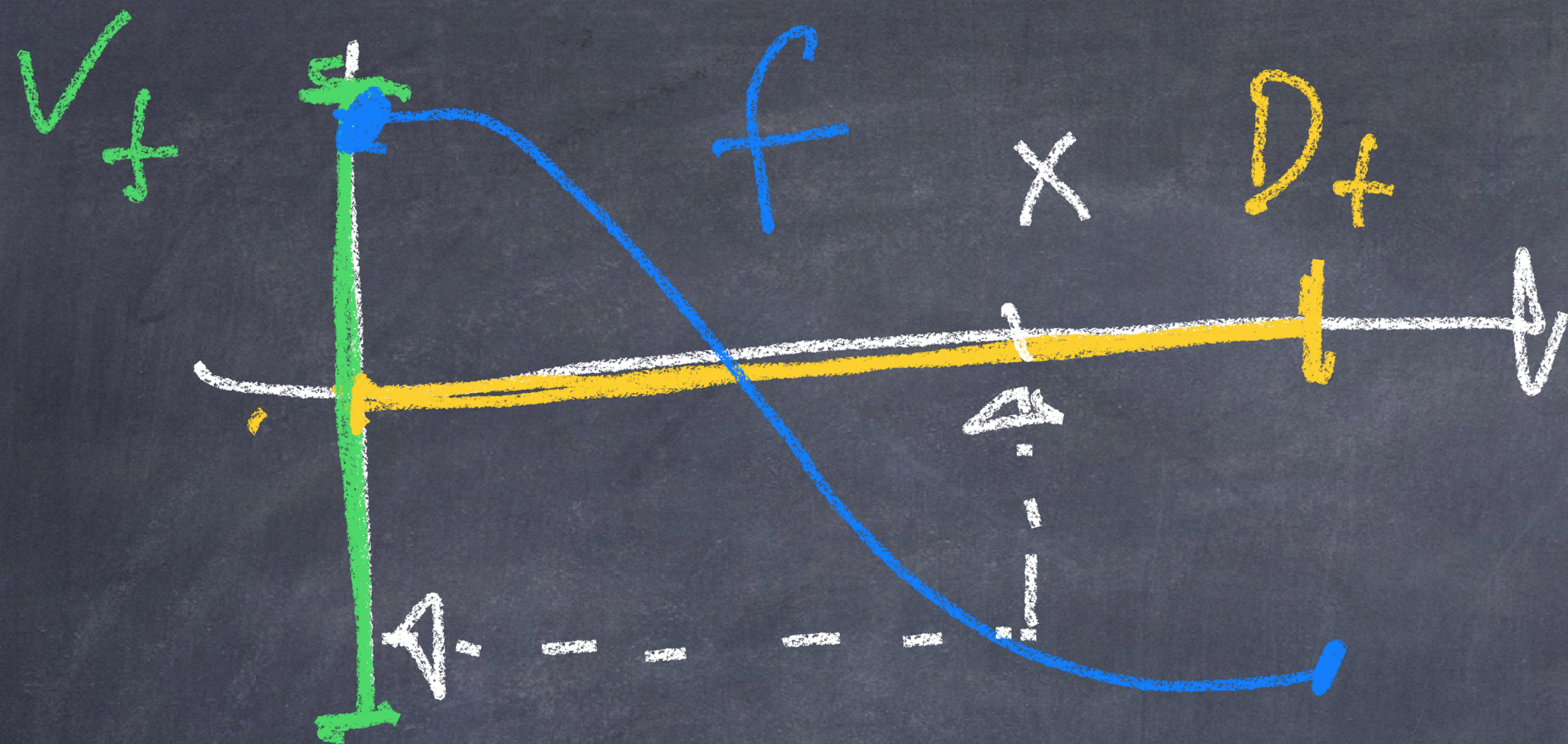
1 $h: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ $h(x) = \sin x$

är surjektiv, t.ex. till varje
 $y \in [-1, 1]$ finns $x \in \mathbb{R}$ s.a. $\sin x = y$.

Om $f: X \rightarrow Y$ är både
injektiv & surjektiv, sägs f vara
en bijektiv funktion (en bijektion)

Ex: $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$
är en bijektion





$f = D_f \rightarrow V_f$
 är en bijektion.

Till varje $x \in D_f$ finns precis
 ett $y \in V_f$ s.a. $y = f(x)$

Till varje $y \in V_f$ finns precis
 ett $x \in D_f$ s.a. $y = f(x)$

Om f är en bijektion $f: S \rightarrow T$ så

- För varje $y \in T$ finns $x \in S$, s.a. $f(x) = y$ (ty f surjektion)
- För varje $y \in T$ finns precis ett $x \in S$, s.a. $f(x) = y$ (ty f injektion)
- För varje $x \in S$ finns precis ett $y = f(x) \in T$. (ty f är en funktion)

Är en bijektion $f: S \rightarrow \bar{T}$

"parvis ihop" elementen i

S med dem i $\bar{T}$ så att

Varje element i den ene

mängden "parvis ihop" med

precis ett element i den andra.

En funktion $f: \underline{X} \rightarrow Y$ kallas
inverterbar om det finns en
funktion $h: Y \rightarrow \underline{X}$ sådan att

$$h(f(x)) = x \quad \forall x \in \underline{X}, \quad f(h(y)) = y, \quad \forall y \in Y.$$

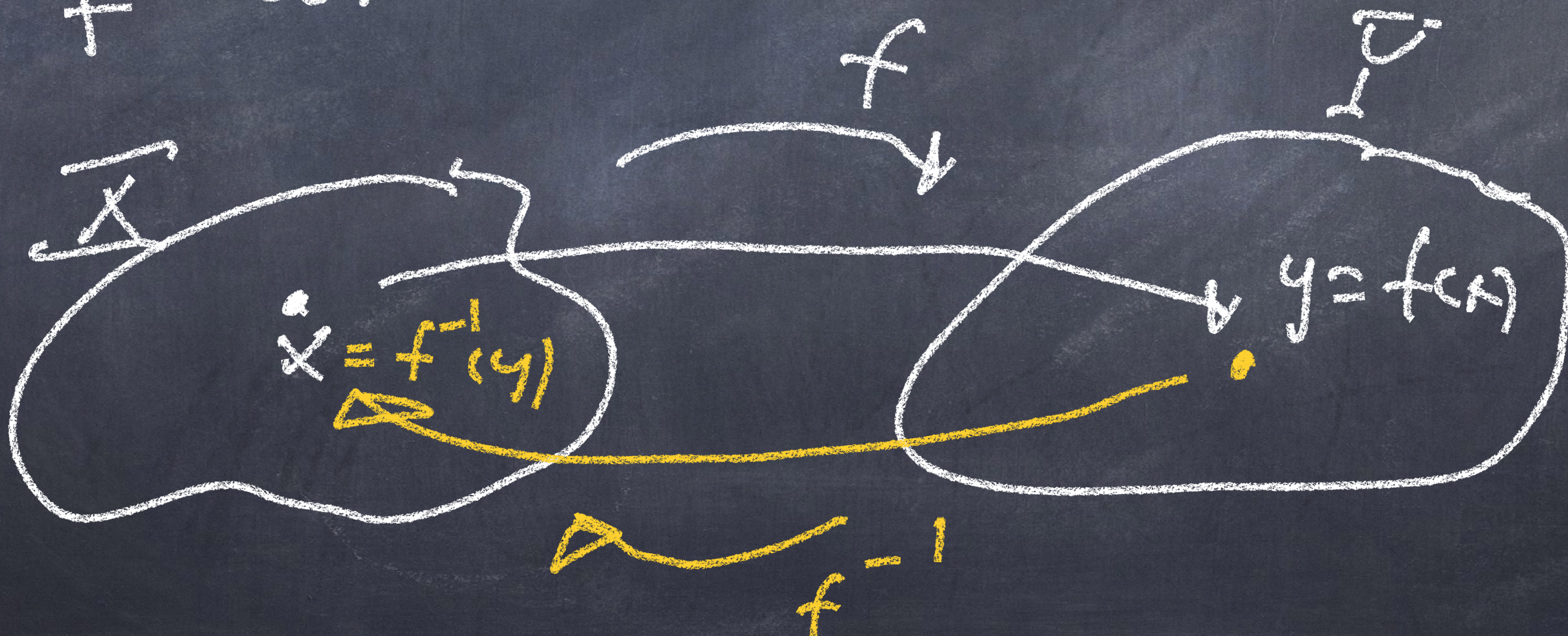
h kallas f 's **invers funktion**

och skrivs $h(x) = f^{-1}(x)$

Sats: $f: \underline{X} \rightarrow Y$

är enverberbar OMM

f är bijektiv.



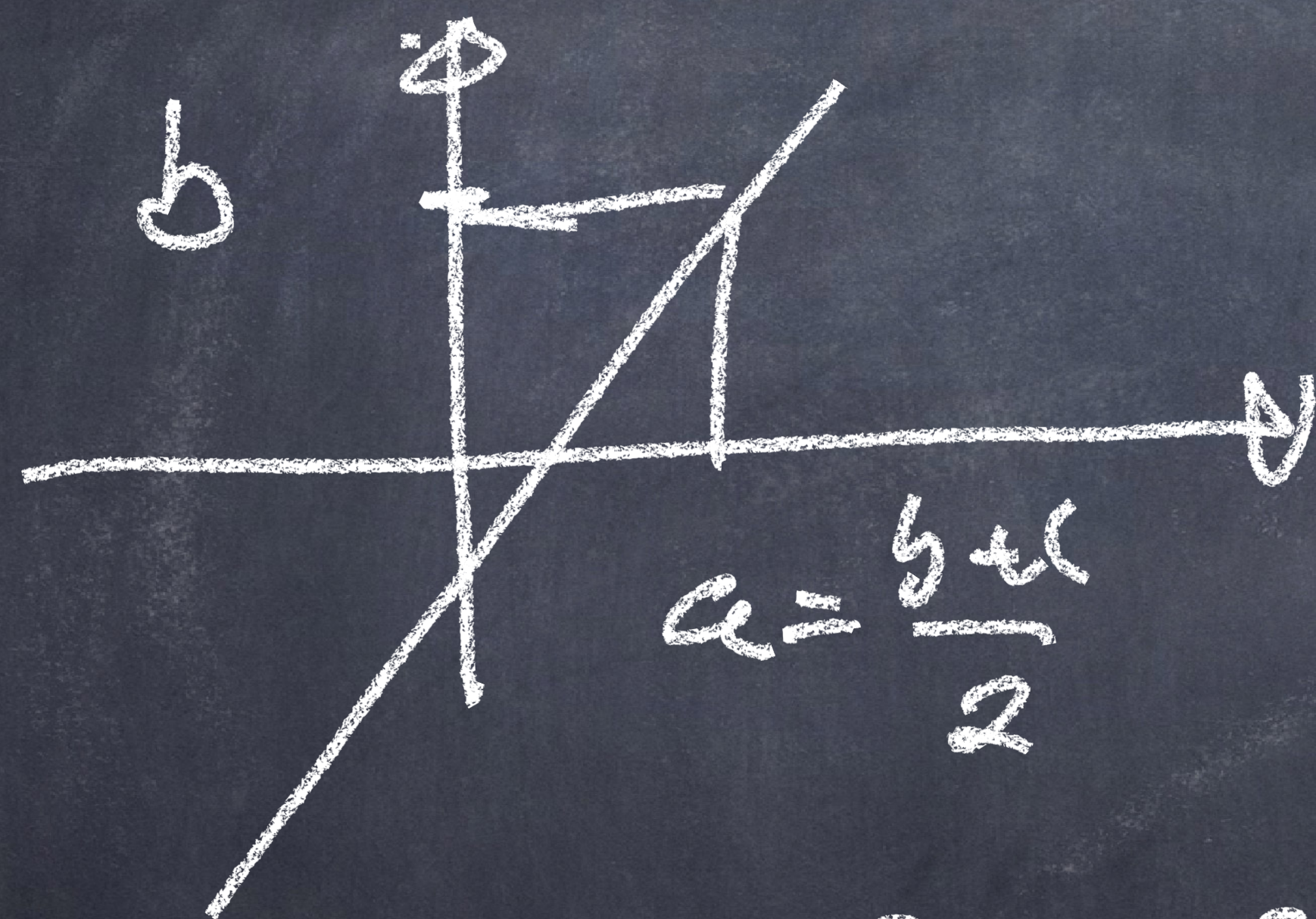
Exempel: Visa att $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$
är invertierbar och bestämt f^{-1} .

Tag $b \in V_f = \mathbb{R}$. Om vi kan visa att
det finns precis ett $a \in D_f = \mathbb{R}$
s.a. $f(a) = b$ är f både injektiv
& surjektiv, dvs bijektiv och invertierbar.

$$b = f(a) \Leftrightarrow b = 2a - 1$$

$$\Leftrightarrow 2a = b + 1 \Leftrightarrow a = \frac{b+1}{2}$$

Also f invertierbar.



$$y = f(x) \Leftrightarrow$$

$$y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

Also

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}, \quad \left(f^{-1}(f(x)) = \frac{x+1}{2} \right)$$

Kontroll: $f(x) = 2x - 1$, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

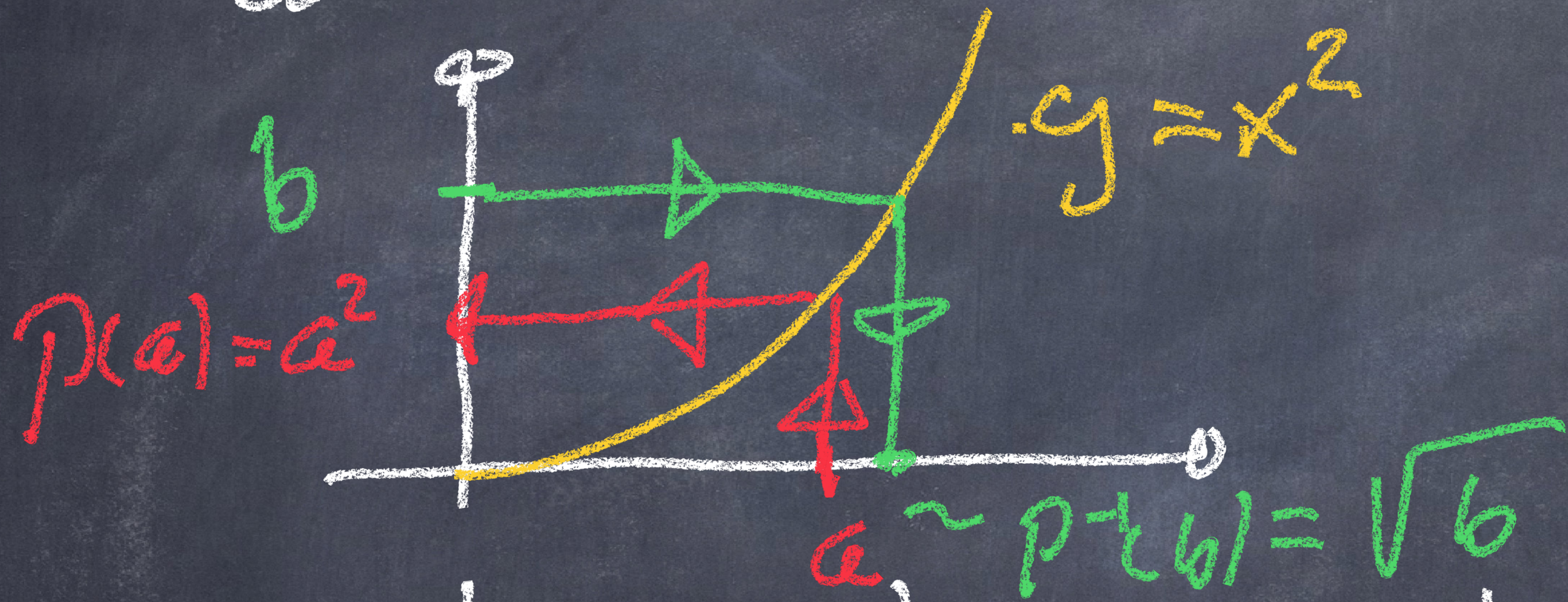
$$f(f^{-1}(x)) = 2(f^{-1}(x)) - 1 =$$

$$= 2 \cdot \frac{x+1}{2} - 1 = x+1-1 = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{f(x)+1}{2} = \frac{2x-1+1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

Ex. $p: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $p(x) = x^2$

är en bijektion och alltså
inverterbar



$p^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $p^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$p(p^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$, $p^{-1}(p(x)) = \sqrt{x^2} = x$
 $\text{om } x \geq 0$ $\text{om } x \geq 0$

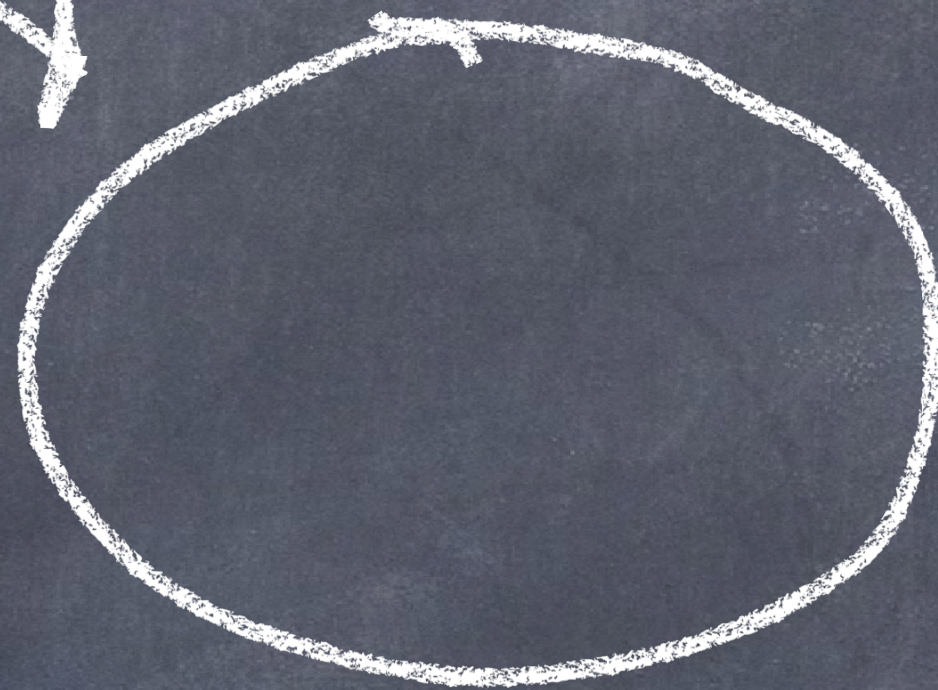
$$y = f(x)$$

$$x = f^{-1}(y)$$

o m

f has
invers
 f^{-1}

$$f: X \rightarrow Y$$



$$X = D_f$$

$$Y = V_f$$

$$f: Y \rightarrow X$$

$$f^{-1}$$

$$D_f = V_{f^{-1}}$$

$$D_{f^{-1}} = V_f$$

En funktion f sägs vara
strängt växande om

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad x_1, x_2 \in D_f \subseteq \mathbb{R}$$

strängt avtagande om

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad x_1, x_2 \in D_f \subseteq \mathbb{R}.$$

OBS:

Om f är strängt växande
eller
strängt avtagande
är f injektiv.



En alternativ
def. av en funktion
↓
(se lärobok och
extramaterial)
↓

Om S och T är mängder definieras
den kartesiska produkten $S \times T$ som

$$S \times T = \{(s, t) : s \in S, t \in T\}$$

Exempel:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

= "xy-plane"

Alternativ def. av funktion:

En funktion $f = S \rightarrow T$
är en delmängd av $S \times T$, $f \subseteq S \times T$,
sådan att

- för varje $x \in S$ finns
precis ett element $(x, f(x)) \in f$.

$$S = \{a, b, c\}$$

$$T = \{x, y, z, u\}$$

$$S \times T = \{(a, x), (a, y), (a, z), (a, u), \\ (b, x), (b, y), (b, z), (b, u), \\ (c, x), (c, y), (c, z), (c, u)\}$$

$$f \subseteq S \times T \quad f = \{(a, y), (b, x), (c, u)\}$$

T
u

(a,u) (b,u) (c,u)

z

(a,z) (b,z) (c,z)

y

(a,y) (b,y) (c,y)

x

(a,x) (b,x) (c,x)

$$f \subseteq S \times T$$

$$S = \{a, b, c\}$$

