

Föreläsning 11

SF1661 HT20

24/9 - 20

Mer om komplekse tal

$\mathbb{Z}$ faktorisering

av polynom.

Faktorsatsen: Om $P(z)$ är ett polynom med komplexa koefficienter, så är följande två påstående ekvivalenta

• $P(z_0) = 0$

• $P(z) = (z - z_0) q(z)$

där $z_0 \in \mathbb{C}$

q polynom

Exempel: $P(z) = z^2 - (2+i)z + 2i$

$$P(i) = i^2 - (2+i) \cdot i + 2i =$$
$$= -1 - 2i + 1 + 2i = 0$$

och $P(z) = (z - i)(z - 2)$

(och även $P(2) = 0$)

$$\text{Lös } x^3 + (-2-2i)x^2 + (-1+2i)x + (2+4i) = 0,$$

då man vet att $x = 1+2i$ är en

Lösning. Faktorisera också V.L.

Låt oss sätta

$$p(x) = x^3 + (-2-2i)x^2 + (-1+2i)x + (2+4i)$$

Enligt faktor satsen gäller att

$(x - (1+2i))$ delar $p(x)$, ty $p(1+2i) = 0$.

$$x^2 - x - 2$$

$$\begin{array}{l} x^3 + (-2 - 2i)x^2 + (-1 + 2i)x + (2 + 4i) \quad | \quad x - (1 + 2i) \\ - (x^3 - (1 + 2i)x^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -x^2 + (-1 + 2i)x + (2 + 4i) \\ - (-x^2 + (1 + 2i)x) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2x + (2 + 4i) \\ - (-2x + 2(1 + 2i)) \\ \hline 0 \end{array}$$

Så

$$p(x) = (x - (1 + 2i)) (x^2 - x - 2)$$

Övriga lösningar till $p(x) = 0$ ges av

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff x = -1 \vee x = 2$$

Svar: $x = -1, x = 2, x = 1 + 2i$

och $p(x) = (x - (1 + 2i)) (x - 2) (x + 1)$

Algebrens fundamentalsets: (bevisas
ej i
denna kurs)

Varje polynom

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

av grad ≥ 1 , $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

har minst ett nollställe

i det komplexa talplanet $\mathbb{C}$.

(d.v. $P(z) = 0$ har minst en lösning)

OBS: Motsu. ej sant i något
annat talområde

"Varje polynom $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$,
av grad ≥ 1 , $a_i \in \mathbb{N} / \mathbb{Z} / \mathbb{Q} / \mathbb{R}$
har minst ett nollställe i

$\mathbb{N} / \mathbb{Z} / \mathbb{Q} / \mathbb{R}$ " är ^uFALSKA utsagor

Ex. Polynom med koefficienter i $\mathbb{A}$ av grad ≥ 1 : sakna
hollställen $\mathbb{C}$

$\mathbb{N}$

$$x+1=0$$

$\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$

$$2x-3=0$$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

$$x^2-2=0$$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$

$$x^2+1=0$$

$\mathbb{R}$

Följsats (till Alg. fund. sats)

Varje polynom $P(z)$ av grad $n \geq 1$

med komplexa koefficienter kan

skrivas a_n om $P(x) = a_n z^n + \dots$
" n st. 1:a grads faktorer

$$P(z) = \gamma (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3) \dots (z - \alpha_n)$$

där $P(\alpha_i) = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, n$

och $\gamma \in \mathbb{C}$ en konstant.

(Om $z \neq \alpha_i$ så $P(z) \neq 0$)

Exempel (enligt ovan)

$$p(x) = x^{\textcircled{3}} + (-2 - 2i)x^2 + (-1 + 2i)x + (2 + 4i)$$

$$= (x - (1 + 2i))(x^2 - x - 2)$$

$$= (x - (1 + 2i))(x - 2)(x + 1)$$

3 st l:ga grads faktorer

Exempel: $p(x) = 2x^7 - 4x^6 + 4x^5 - 4x^4 + 2x^3$

$$= 2x^3 (x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1)$$

$$= 2x^3 (x^2 - 2x + 1) (x^2 + 1)$$

$$= 2x \cdot x \cdot x (x-1)(x-1)(x+i)(x-i)$$

$$= 2x^{\textcircled{3}} (x-1)^{\textcircled{2}} (x+i)' (x-i)'$$

Faktorer

multiplacitet:

3

2

1

1

Bevisside Tag $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$

$$a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$$

ALG. FUND. SATS. $\Rightarrow$ finns nollställe α_1 s.a. $P(\alpha_1) = 0$
polynom av grad $(n-1)$

FAKTORSAISEN: $P(z) = (z - \alpha_1) q_1(z)$

ALG FUND SATS: finns α_2 s.a. $q_1(\alpha_2) = 0$
polynom av grad $(n-2)$

FAKTORSAISEN: $P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) q_2(z)$
OSV...

Beris: Induktion över gradtal n .

(I) Ind. Bas: Om $\text{grad } p = 1$ är
 $p(z) = a_1 z + a_0, a_1 \neq 0 \Leftrightarrow p(z) = a_1 (z - (-\frac{a_0}{a_1}))$
 $p(-\frac{a_0}{a_1}) = 0$

(II) Antag nu att påst. sant för alla
polynom av grad k , där $k \in \mathbb{N}$.

Låt $p(z)$ vara polynom av grad $(k+1)$.

Enligt ALG Funn. SATS har p ett nollställe α , $p(\alpha) = 0$

och enligt FAKTORSATSEN är då $p(z) = (z - \alpha) q(z)$

$= \left\{ \begin{array}{l} q \text{ har grad } k \\ \text{se enligt ind. ant.} \end{array} \right\} = (z - \alpha) (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_k)$
v.s.p.

Sats: Låt $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

där $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Då kan $p(x)$ faktoriseras i polynom av grad 1 och grad 2 med reella koefficienter.

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k) (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1) \dots (x^2 + \beta_m x + \gamma_m)$$

där $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, $\beta_l, \gamma_l \in \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, m$, och

- $n = k + 2m$

- Andragradsfaktorererna saknar reella nollställen

$$\begin{aligned} \text{och } (x^2 + \beta_k x + \gamma_k) &= (x - z_k)(x - \bar{z}_k) \\ &= (x - (c_k + id_k))(x - (c_k - id_k)) \end{aligned}$$

Exempel: $p(x) = x^2 - 2x + 5$

$$p(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$$

så
enligt

$$p(x) = x^2 - 2x + 5 = (x - (1+2i))(x - (1-2i))$$

Faktor
satsen

$p(x)$ är av grad 2 med
reella koefficienter

• p saknar reella nollställen

• p har 2 komplexa nollställen

$$z_1 = 1+2i \text{ och } z_2 = \overline{z_1} = 1-2i$$

(enligt följsats
till Alg. Fund. Sats)

$$\begin{aligned} (x - z_1)(x - \overline{z_1}) &= (x - (1+2i))(x - (1-2i)) = ((x-1) - 2i)((x-1) + 2i) \\ &= ((x-1)^2 - (2i)^2) = x^2 - 2x + 1 + 4 = p(x) \end{aligned}$$

Exempel $p(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 5$

Eftersom $p(1) = 0$ och $p(-1) = 0$ är

$(x-1)$ och $(x+1)$ faktorer i $p(x)$, dvs $(x-1)(x+1) = (x^2-1)$

delar $p(x)$. Polynomdivision ger

$$p(x) = (x^2-1)(x^2-2x+5)$$

faktorisering
i pol. med
reella koef.

$$= (x+1)(x-1)(x^2-2x+5)$$

$$= (x+1)(x-1)(x-(1+2i))(x-(1-2i))$$

så har
reella
nollställen
enl. ovan

faktorisering i polynom med komplexa koef.

Exempel: Lös ekvationen $P(x) = 0$ då

$$P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 \quad \text{och man vet att } P(i) = 0$$

Eftersom $P(i) = 0$ och P är polynom med reella koeff.
måste även $P(\bar{i}) = 0$ (och $\bar{i} = -i$).

Eul. faktorsatsen är då $(x - i)$ och $(x + i)$ faktorer
i P , $P(x) = (x - i)(x + i) q(x) = (x^2 - i^2) q(x) = (x^2 + 1) q(x)$

Polynomdiv ger $q(x) = \frac{P(x)}{x^2 + 1} = (x^2 + x - 2)$ och

$$P(x) = (x + i)(x - i)(x^2 + x - 2).$$

$$5c \quad p(x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = \pm i \quad \text{eller} \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm i \quad \text{eller} \quad x = 1 \quad \text{eller} \quad x = -2$$

$$\left(\text{och} \quad p(x) = (x + i)(x - i)(x - 1)(x + 2) \right)$$

Bevis (Om Fakt. av pol. med reella koeff.)

Lemma: Om $p(x)$ polynom med reella koeff
och $p(\alpha) = 0$ så även $p(\bar{\alpha}) = 0$

Bevis Lemma. Antag $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

$a_i \in \mathbb{R}$. Då gäller

$$\begin{aligned} 0 = \overline{0} &= \overline{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0} = \left. \begin{array}{l} \text{enligt} \\ \text{rättningsregler för} \\ \text{konjugat} \end{array} \right\} \\ &= \overline{a_n} \bar{x}^n + \dots + \overline{a_1} \bar{x} + \overline{a_0} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{a_i} = a_i, \text{ för } a_i \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \\ &= a_n \bar{x}^n + \dots + a_1 \bar{x} + a_0 = \underline{p(\bar{x})} \end{aligned}$$

Låt nu $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{K}$.

Enligt ALG FUND. SATS finns $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ s.a.

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n), \quad p(\alpha_i) = 0$$

Om Tex $\alpha_1 = c + ib$, $b \neq 0$, vet vi enligt Lemma
att även $c - ib$ är en röt, såg $\alpha_2 = c - ib$.

$$\begin{aligned} (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) &= (x - (c + ib))(x - (c - ib)) \\ &= ((x - c) - ib)((x - c) + ib) = (x - c)^2 - (ib)^2 \\ &= (x^2 - 2cx + c^2 + b^2) \quad \text{o. s. v.} \end{aligned}$$

Binomiska ekvationer 2 enhetsrötter

Ex: Bestäm alla komplexa
lösningar till $z^3 - 1 = 0$

Metod I: "gissa" $\alpha_1 = 1$ som lösning,
så $z-1$ faktor.

Polynomdivision ger

$$(z^3 - 1) = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

och $z^2 + z + 1 = 0$ ger övriga lösningar,

$$z = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Svar: $z = 1$,

$$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Metod 2 (sengleva för $z^n - 1 = 0, n \in \mathbb{N}$)

$$z^3 - 1 = 0 \iff z^3 = 1.$$

- Ansätt $z = r e^{i\varphi}$, så $z^3 = r^3 e^{i3\varphi}$
- Skriv H.L. på polär form, $1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$

$$z^3 = 1 \iff$$

$$r^3 e^{i3\varphi} = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$$

$$r^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 1 (\cos 0 + i \sin 0)$$

$$(1) \iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\varphi = 0 + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

(1) $\forall r \in \mathbb{R}$ med polär form

Lika OMM beloppet

är lika och argumenten

Lika så när som på

hela varv

$$(2) \iff \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = n \cdot \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$(2) \cdot r \geq 0, r \in \mathbb{R}$$

Lösningar till $z^3 - 1 = 0$ ges alltså av

$$z = r e^{i\varphi}, \quad \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = n \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$= 1 \cdot \left(\cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \right).$$

Detta ger tre olika lösningar

l. ex för $n = 0, 1, 2$

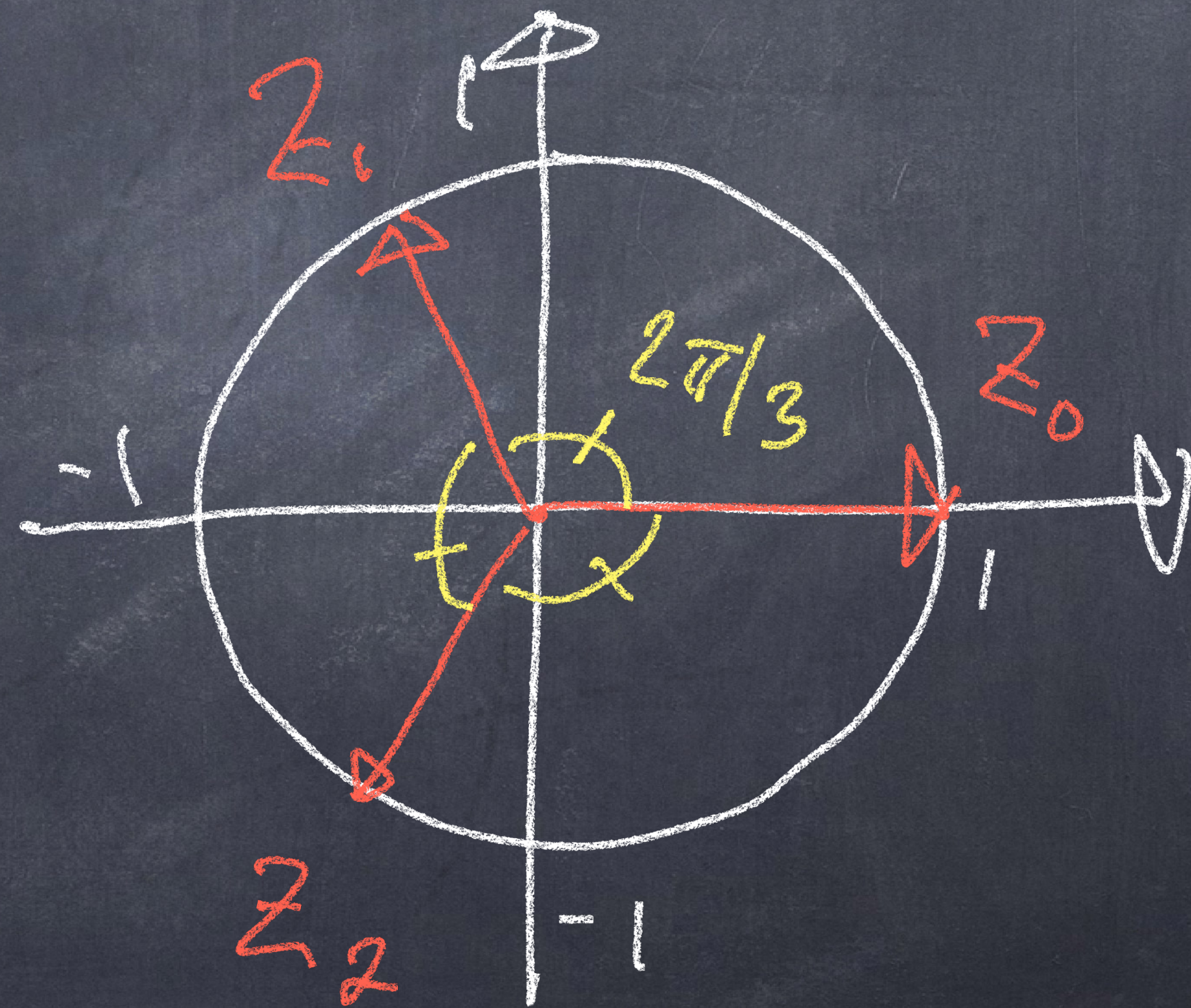
$$Z_n = \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + j \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$$

$F_0^{\text{UV}} \quad n=0, 1, 2 \quad \text{fas}$

$$Z_0 = 1$$

$$Z_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_2 = \left(\cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Detta betyder också att

$$(z^3 - 1) = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

$$= (z - 1) \left(z - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right) \left(z - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right)$$

$$= (z - 1) \left(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

Ekvationen $z^n = 1$ Ansätt $z = re^{iv}$

Ekv. skrivs då $(re^{iv})^n = 1 \cdot e^{0 \cdot i}$

$$\Rightarrow r^n e^{in v} = 1 \cdot e^{0 \cdot i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^n = 1 \\ n v = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ v = \frac{2k}{n} \pi. \end{cases}$$

Detta ger n st. olika lösningar, t.ex för

$$k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad z_k = e^{\frac{2k}{n} i \pi}$$

$$z_k = e^{\frac{2k}{n} i \pi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

$$z_0 = e^0 = \cos\left(\frac{0}{n} \cdot 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{0}{n} \cdot 2\pi\right) = 1$$

$$z_1 = e^{\frac{1}{n} 2i\pi} = \cos\left(\frac{1}{n} \cdot 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{n} \cdot 2\pi\right)$$

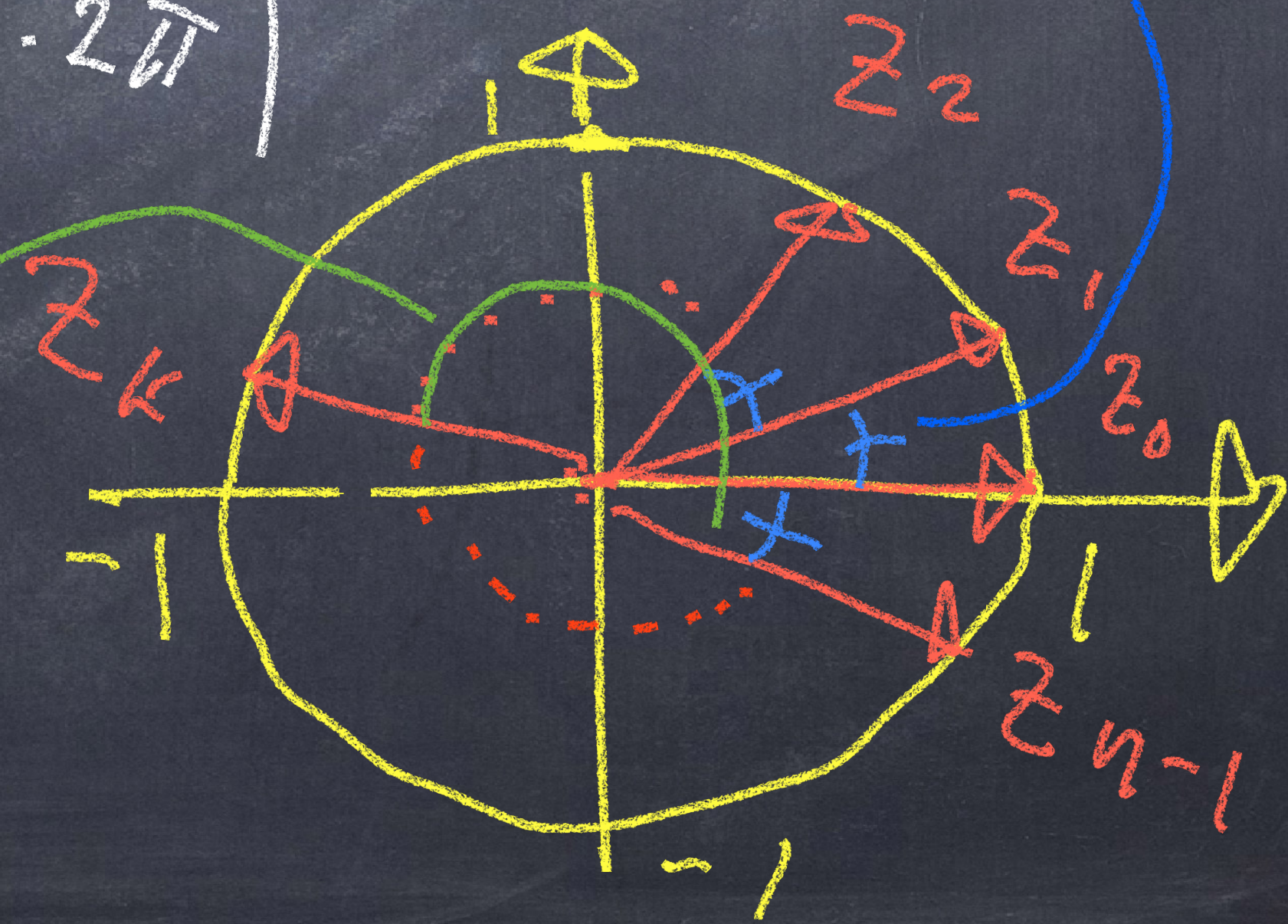
$$z_2 = e^{\frac{2}{n} 2i\pi} = \cos\left(\frac{2}{n} \cdot 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{n} \cdot 2\pi\right)$$

$$\vdots$$

$$z_{n-1} = e^{\frac{(n-1)}{n} \cdot 2\pi i} = \cos\left(\frac{n-1}{n} 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{n-1}{n} \cdot 2\pi\right)$$

Enketsrötter
av ordning n

$$\frac{k}{n} \cdot 2\pi$$



Two polynomial equations with complex coefficients.

Ex: $z^2 = 1 + i$

Ansätt $z = r e^{i\varphi}$, som ger $z^2 = r^2 e^{i2\varphi}$

Skriv $1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$

Ekv. kan då skrivas $r^2 e^{2i\varphi} = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ 2\varphi = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{8} + n \cdot \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 4\sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{8} + n \cdot \pi \end{cases}, \text{ ger lösningar}$$

$$z_n = 4\sqrt{2} e^{i(\pi/8 + n\pi)}$$

Two olika lösn.

$$z_0 = 4\sqrt{2} e^{i\pi/8} = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$$

$$z_1 = 4\sqrt{2} e^{i9\pi/8} = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right)$$

$$\underline{\text{Lös } z^2 - 4iz - 5 - i = 0}$$

Kvadratkomp. $(z - 2i)^2 - 1 - i = 0 \Rightarrow (z - 2i)^2 = 1 + i$

$$z^2 - 4iz - 4$$

Sätt $w = z - 2i$, ekv. blir $w^2 = 1 + i$

Enligt ovan har den ekv. två lösningar

$$w_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \text{ \& } w_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right)$$

Vilket ger två lösningar till given ekvation

$$z_0 = w_0 + 2i = \sqrt[4]{2} \cos \frac{\pi}{8} + i \left(2 + \sin \frac{\pi}{8} \right), \quad z_1 = w_1 + 2i = \dots$$