Föreläsning 7

SF1661 HT20

10/9

- Summor
  - $\sum_{k=1}^{n} a_k$
  - aritmetiska
  - geometriska
- Induktionsbevis
  (även F8)

Summanotation

$$\sum_{k=1}^{9} k \cdot 10^{k} =$$

$$= 1 \cdot 10^{1} + 2 \cdot 10^{2} + 3 \cdot 10^{3} + \dots + 9 \cdot 10^{9}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ k=1 & k=2 & k=3 \quad \dots & k=9 \end{array}$$

övre summationsgräns

summasymbol ("stora sigma")

$$\sum_{k=1}^{9} k \cdot 10^{k}$$

termer

nedre summationsgräns

summationsindex

"Summan av $k \cdot 10^{k}$ när k löper från 1 till 9"

Exempel:

- $\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$

- $\sum_{j=2}^{10} j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 10^2$

- $\sum_{m=-3}^{3} 2^m = 2^{-3} + 2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$
  $= 1/8 + 1/4 + 1/2 + 1 + 2 + 4 + 8$

- $$\sum_{i=0}^{5} 2 = \underset{i=0}{2} + \underset{i=1}{2} + \underset{i=2}{2} + \underset{i=3}{2} + \underset{i=4}{2} + \underset{i=5}{2}$$

- $$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

$$\sum_{k=0}^{4}(2k+2) = 2+4+6+8+10$$

$$\sum_{j=1}^{5} 2j = 2+4+6+8+10$$

$$\sum_{\ell=-1}^{3}(2\ell+4) = 2+4+6+8+10$$

$$2\sum_{m=0}^{4}(k+1) = 2(1+2+3+4+5)$$

$$= 2+4+6+8+10$$

Indexbyte

Gör ett indexbyte i summan

$$S = \sum_{j=1}^{10} (j+1)\cdot 2^{j}$$

så att indexeringen börjar på 0.

Sätt $k = j-1$ (så att $j=1 \Leftrightarrow k=0$).

Då är $j = k+1$, och vi får

$$S = \sum_{k=0}^{9} (k+2)\, 2^{k+1}$$

Sats:

- $$\sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k)$$

- $$c \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c\, a_k$$

Förenkla:

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 - 2\sum_{k=0}^{99} k - 100 = \left\{ \begin{array}{c} j = k+1 \\ \text{i} \\ \text{andra summan} \end{array} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} k^2 - 2\sum_{j=1}^{100} (j-1) - 100 =$$

$$= \sum_{k=1}^{100} k^2 - 2\sum_{k=1}^{100} (k-1) - \sum_{k=1}^{100} 1$$

$$= \sum_{k=1}^{100} (k^2 - 2k + 2 - 1) = \sum_{1}^{100} (k-1)^2 \underset{m = k-1}{=} \sum_{m=0}^{99} m^2 = \sum_{m=1}^{99} m^2$$

Aritmetiska summor

$$1+2+3+4+ \ldots\ldots + 100 = ?$$

$$S = 1+2+3+ \ldots + 99+100$$
$$+\; S = 100+99+98+ \ldots + 2+1$$

$$2S = \underbrace{101+101+100 \ldots\ldots + 101+101}_{100 \text{ termer}}$$

$$2S = 100 \cdot 101 \implies S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Aritmetiska summor

Definition. En **aritmetisk summa** är en summa $\sum_{i=m}^{n} a_i$ där *differensen* av två på varandra följande termer är lika med någon konstant b, dvs $a_{i+1} - a_i = b$ för alla i, $n \leq i < m$.

Sats. För en aritmetisk summa som ovan med differens b gäller att

$$S = \sum_{i=m}^{n} (ib + c) = (mb + c) + ((m+1)b + c) + \cdots + (nb + c),$$

där c är en konstant. Efter ett indexbyte kan den också skrivas

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} (kb + a_0) = a_0 + (b + a_0) + (2b + a_0) + \cdots + ((N-1)b + a_0)$$

Observera att antalet termer är $N = n - m + 1$.

Exempel $8 + 11 + 14 + 17 + 20$

$$= \sum_{k=2}^{6} (k \cdot 3 + 2) =$$

$$= \sum_{k=0}^{4} (k \cdot 3 + 8).$$

Ex: Beräkna $S = \sum_{k=2}^{20} (4k+1)$

Aritmetisk differens = 4

$$S = 9 + 13 + 17 + \ldots + 77 + 81$$

$$+\ S = 81 + 77 + 73 + \ldots + 13 + 9$$

$$2S = \underbrace{90 + 90 + 90 + \ldots + 90 + 90}_{19 \text{ termer}}$$

$$2S = 19 \cdot 90 \Longrightarrow S = \frac{19 \cdot 90}{2} = 19 \cdot 45 = \ldots$$

Exempel: Beräkna summan

$$S = \sum_{k=0}^{7} (3i+2) = 2+5+8+ \ldots +23$$

$$\begin{aligned} S &= 2+5+8+ \ldots +23 \\ + \quad S &= 23+20+17+ \ldots +2 \end{aligned}$$

$$2S = \underbrace{25+25+ \ldots +25}_{8 \text{ st}} = 200$$

$$\Rightarrow \quad S = 100$$

Aritmetiska summor

Sats. Om

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} (kb + a_0)$$

är en aritmetisk summa med N stycken termer, första term a_0 och sista term $a_{N-1} = (N-1)b + a_0$, så är

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} (kb + a_0) = N \frac{a_0 + a_{N-1}}{2}$$

$$= \text{(antal termer)} \cdot \text{(medelvärdet av första och sista termen)}$$

Bevis

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} kb + a_0 = \{M = N-1\} = \sum_{k=0}^{M} kb + a_0$$

$$S = a_0 + (b + a_0) + (2b + a_0) + \dots + (Mb + a_0)$$

$$+ \quad S = (Mb + a_0) + ((M-1)b + a_0) + ((M-2)b + a_0) + \dots + a_0$$

$$2S = \underbrace{(Mb + 2a_0) + (Mb + 2a_0) + \dots\dots + (Mb + 2a_0)}_{M+1 = N \text{ st.}}$$

$$2S = (Mb + 2a_0) \cdot N$$

$$S = \frac{a_0 + (a_0 + Mb)}{2} \cdot N$$

$$= \frac{a_0 + (a_0 + (N-1)b)}{2}$$

$$= N \cdot \frac{(a_0 + a_{N-1})}{2}$$

V.S.B.

Exempel

$$\sum_{n=1}^{500\,000} 2n = (2+4+\ldots\ldots+1\,000\,000)$$

$$= 500\,000 \, \frac{2+1\,000\,000}{2} = 500\,000 \cdot 500\,001$$

$$= 250\,000\,500\,000$$

Geometriska summor

Definition. En **geometrisk summa** är en summa $\sum_{i=m}^{n} a_k$ där *kvoten* av två på varandra följande termer är lika med någon konstant q, dvs $\frac{a_{i+1}}{a_i} = q$ för alla i, $n \leq i < m$.

Sats. För en geometrisk summa som ovan med kvot q gäller att

$$S = \sum_{i=m}^{n} dq^i = dq^m + dq^{m+1} + \dots + dq^n,$$

där d är en konstant. Efter ett indexbyte kan den också skrivas

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} a_0 q^k = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \dots + a_0 q^{N-1}.$$

Observera att antalet termer är $N = n - m + 1$.

- $\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1} = 1+2+4+8+16$

kvot $= 2$

- $\sum_{k=1}^{10} 5\cdot 10^{k-1} = 5+5\cdot 10+5\cdot 10^2+\dots+5\cdot 10^9$

kvot $= 10$

kvot $= (-1)$

- $\sum_{l=0}^{20} (-1)^l = (-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\dots+(-1)^{20}$

$= \cancel{1-1}+\cancel{1-1}+\dots+\cancel{1-1}+1 = 1$

<u>Exempel</u>

$$S = \sum_{k=1}^{100} 4\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{4}{3^{100}}$$

är geometrisk, med första term $\frac{4}{3}$, 100 termer och kvot $\frac{1}{3}$.

S kan också skrivas t.ex

$$S = \sum_{l=0}^{99} 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{l+1} \text{ eller } S = \sum_{l=0}^{99} \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^l$$

Att beräkna en geometrisk summa. Ex:

$$S = \sum_{k=1}^{100} 4\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{4}{3} + \cancel{\frac{4}{3^2}} + \cancel{\frac{4}{3^3}} + \dots + \cancel{\frac{4}{3^{99}}} + \cancel{\frac{4}{3^{100}}}.$$

Kvot $q = \frac{1}{3}$

$$-\; qS = \frac{1}{3}S = \cancel{\frac{4}{3^2}} + \cancel{\frac{4}{3^3}} + \dots + \cancel{\frac{4}{3^{100}}} + \frac{4}{3^{101}}$$

$$\left(S - \frac{1}{3}S\right) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3^{101}} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{2}{3}S = \frac{4}{3} - \frac{4}{3^{101}} \Longleftrightarrow S = \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3^{101}}\right)\frac{3}{2}$$

$$S = 2\left(1 - 1/3^{100}\right)$$

$$\frac{2}{3} S = \frac{4}{3}\left(1 - 1/3^{100}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad S = 2\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right) = 2\,\frac{3^{100} - 1}{3^{100}}$$

Beräkna: $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

kvot $q = 1/2$

$$S = \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{2^3}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{2^9}} + \frac{1}{2^{10}}$$

$$- \quad qS = \frac{1}{2}S = \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{2^3}} + \cancel{\cdots} + \cancel{\frac{1}{2^{10}}} + \frac{1}{2^{11}}$$

$$S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{11}} \Rightarrow \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{11}}$$

$$\Rightarrow S = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{2^{10} - 1}{2^{10}}$$

Geometriska summor

Sats. Om

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} a_0 q^k$$

är en geometrisk summa med första term a_0, N stycken termer och kvot $q \neq 1$ är

$$\begin{aligned} S &= a_0 \frac{1-q^N}{1-q} \\ &= (\text{första term}) \cdot \frac{1-(\text{kvoten})^{\text{antal termer}}}{1-(\text{kvoten})} \end{aligned}$$

Om $q = 1$ är $S = \sum_{k=0}^{N-1} a_0 q^k = N a_0$

Bevis:

$$S = \sum_{k=0}^{N-1} a_0 q^k = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \ldots\ldots + a_0 q^{N-2} + a_0 q^{N-1}$$

$$- \; qS = \qquad\qquad = a_0 q + a_0 q^2 + \ldots\ldots\ldots + a_0 q^{N-1} + a_0 q^N$$

$$S - qS = a_0 - a_0 q^N$$

$$S(1-q) = a_0(1-q^N)$$

$$\Longrightarrow \quad S = \frac{1-q^N}{1-q}$$

Speciellt gäller

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

(Minnesstöd/kontroll):

$$(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1})(1-r)$$

$$= (1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}) - r(1 + r + \dots + r^{n-1})$$

$$= 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \dots + \cancel{r^{n-1}} - \cancel{r} - \cancel{r^2} - \dots - \cancel{r^{n-1}} - r^n = 1 - r^n$$

Induktionsbevis

(forts. följer nästa föreläsning)

Induktionsbevis

Teknik för att bevisa en utsaga $P(n)$
som beror av ett heltal n,
och som skall bevisas sann
för alla $n \geqslant$ (något visst N_0).

T-ex:

- $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$, för alla $n \geq 1$

- $(3 \cdot 9^n + 25^n)$ är jämnt delbart med 4 för alla $n \geq 0$

- $2^n > n^2$ för alla $n \geq 5$

Princip

För att visa att $P(n)$ är sant för alla heltal $n \geq N_0$

(I) Visa att $P(N_0)$ sant

Induktionsbas

(II) Visa att implikationen

$$\boxed{P(k) \text{ sann} \Longrightarrow P(k+1) \text{ sann}}$$

är sann för alla heltal $k \geq N$

Induktionssteg

(I) Visa att $P(N_0)$ sant

(II) Visa att implikationen

$$\boxed{P(k) \text{ sann} \Longrightarrow P(k+1) \text{ sann}}$$

är sann för alla heltal $k \geq N$

- Enligt (I) är nu $P(N_0)$ sann.
- Eftersom $P(N_0)$ sann, ger (II) att $P(N_0+1)$ sann
- Eftersom $P(N_0+1)$ sann, ger (II) att $P(N_0+2)$ sann

osv.

(III) Enligt INDUKTIONSPRINCIPEN är då $P(n)$ sant för alla $n \geq N_0$.

Vi visar $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}}_{P(n)}$, $\forall n \geq 1$

(I) För $n=1$ gäller V.L. $= \sum_{j=1}^{1} j = 1$

Induktionsbas

och H.L. $= \frac{1(1+1)}{2} = 1$

Så $P(1)$ sann.

II Vi ska nu visa implikationen

Induktionssteg $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$, $\forall k \geq 1$,

dvs vi ska visa att

OM $\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}$, för något $k \geq 1$

SÅ är också $\sum_{j=1}^{k+1} j = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

• Antag att $P(k)$ är sann, dvs

antag $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}$. (Induktions-antagande)*

• Då gäller för $n = k+1$ att

$$V.L.(n=k+1) = \sum_{j=1}^{k+1} j \underset{\text{omskriv för kunna använda (*)}}{=} \sum_{j=1}^{k} j + (k+1) \overset{\text{Enligt}}{\underset{(*)}{=}}$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \underset{\text{förenkling}}{=} \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$H.L.(n=k+1) = \frac{n(n+1)}{2}\Big|_{n=k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

induktionssteg

- Vi har visat om V.L.$(n=k)$ = H.L.$(n=k)$, dvs
om $P(k)$ sann SÅ är V.L.$(n=k+1)$ = H.L.$(n=k+1)$ dvs $P(k+1)$ sann

Alltså är implikationen

- $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$ sann.

Alltså:

$$\left.\begin{array}{l} P(1) \text{ sann} \\ P(k) \Longrightarrow P(k+1),\ k \geq 1, \text{ sann} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P(n) \text{ sann alla } n \geq 1$$

Extra material

Geometriska serier

$$\sum_{k=0}^{\infty} c\,q^k \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c\,q^k$$

$$= c + cq + cq^2 + cq^3 + \ldots\ldots$$

Exempel: $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots\dots$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big[\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\dots+\frac{1}{2^n}}_{n\text{ st.}}\Big] =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c\, q^k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c\, q^k = \left\{ \begin{matrix} \text{om} \\ q \neq 1 \end{matrix} \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} c\, \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \left\{ \begin{matrix} \text{om} \\ |q| < 1 \quad \text{så} \\ \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= c\, \frac{1}{1-q}$$

<u>Sats:</u> Om $|q| < 1$ så

$$\sum_{k=1}^{\infty} c\, q^{k-1} = \frac{c}{1-q}$$

Om $|q| \geq 1$ så

är $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} c\, q^{k-1}$ ej definierat.

Extra övningsuppgift

Ex:

$$S = -2 + 5 + 12 + 19 + 26 + 33 + 40 + 47$$

S aritmetisk (med differens $b = 7$) och åtta st. termer

$$S = 8 \cdot \frac{(-2) + 47}{2} = 4 \cdot 45 = 180$$

Alt

$$\begin{aligned} & S = -2 + 5 + \ldots\ldots + 47 \\ + \; & S = 47 + 40 + \ldots\ldots + (-2) \\ \hline & 2S = 45 + 45 + \ldots\ldots + 45 \end{aligned}$$

$$S = \frac{8 \cdot 45}{2} = 180$$

Beräkna

$$\sum_{n=0}^{9} 2 \cdot 5^{n}$$