

Föreläsning 4

SF1661 HT20

2/9

Aritmetik

i olika

tal mängder

Rationella

och

Reella tal

Varför räknar vi
som vi gör?

Ex.

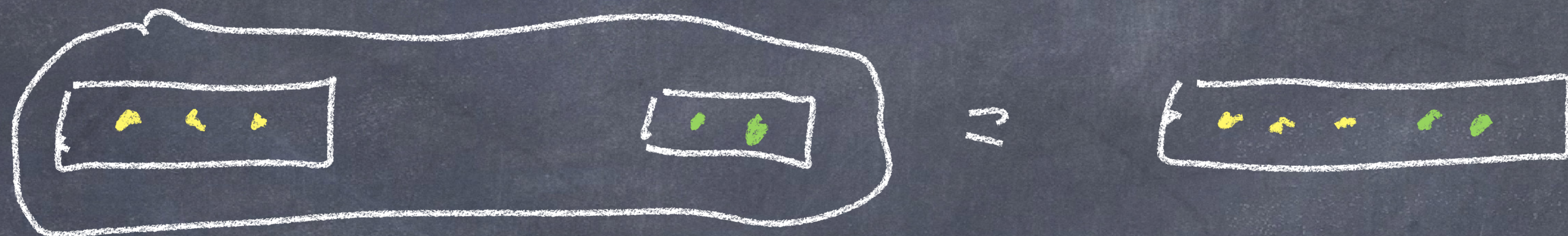
$$(-1) \cdot (-1) = +1$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

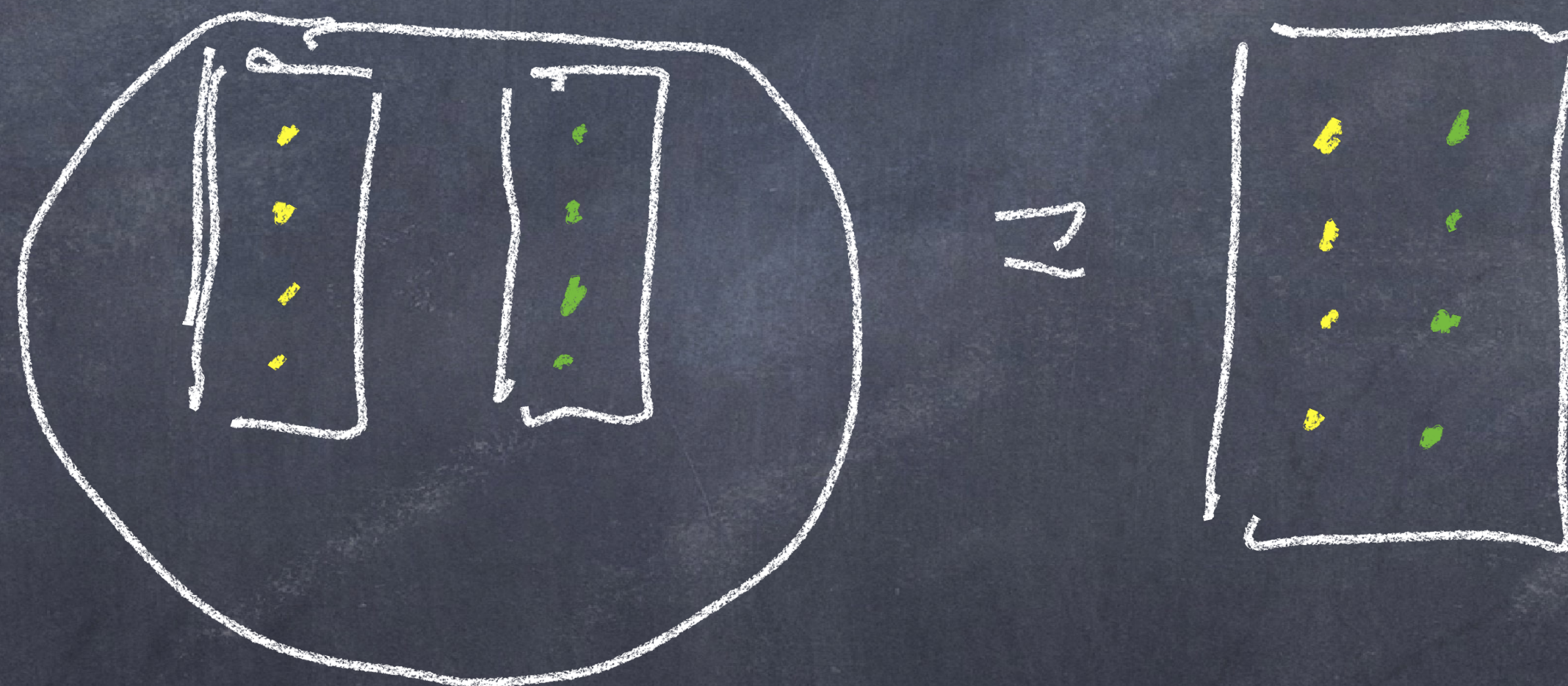
$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Modell för addition & multiplikation i $\mathbb{N}$.

3+2:



2 · 4



ger följande "naturliga" egenskaper

SATS A: Om m, n och p är
naturliga tal så gäller att

(1) $n + m = m + n$ (kommutativa lagen för add.)

(2) $(n + m) + p = n + (m + p)$ (associativ lagen för add.)

(3) $n \cdot m = m \cdot n$ (kommutativa lagen för mult.)

(4) $(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$ (associativa lagen för mult.)

(5) $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$ (1 är multiplikativt enhetselement)

(6) $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$ (distributiva lagen:
multiplikation distribuerar
över addition)

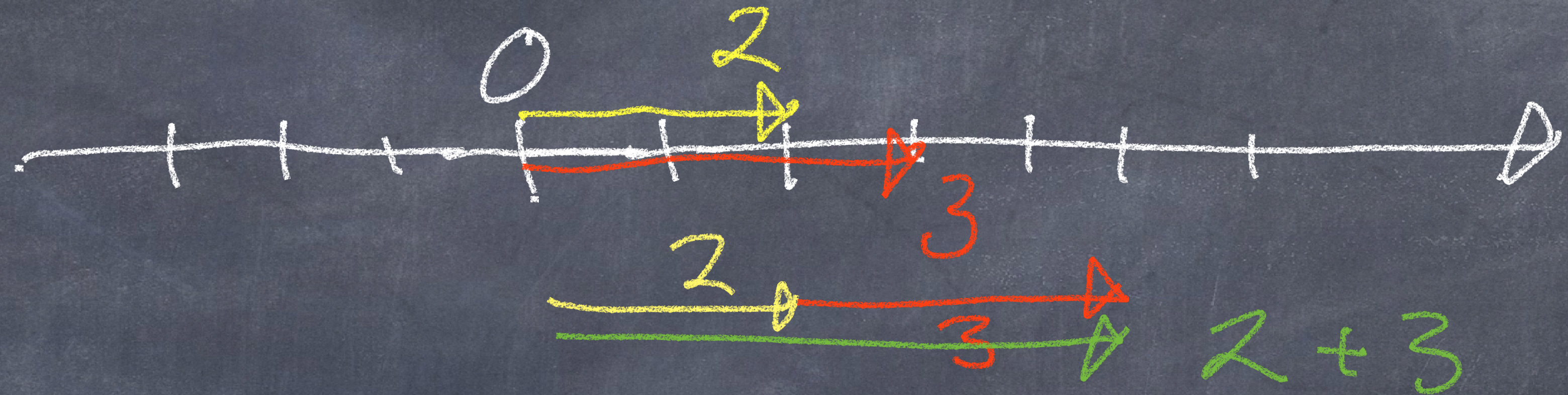
De hele talen, $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

- $0 + n = n + 0$
 - $m + (-m) = 0$
- } Def en 0 &
negatieve tal

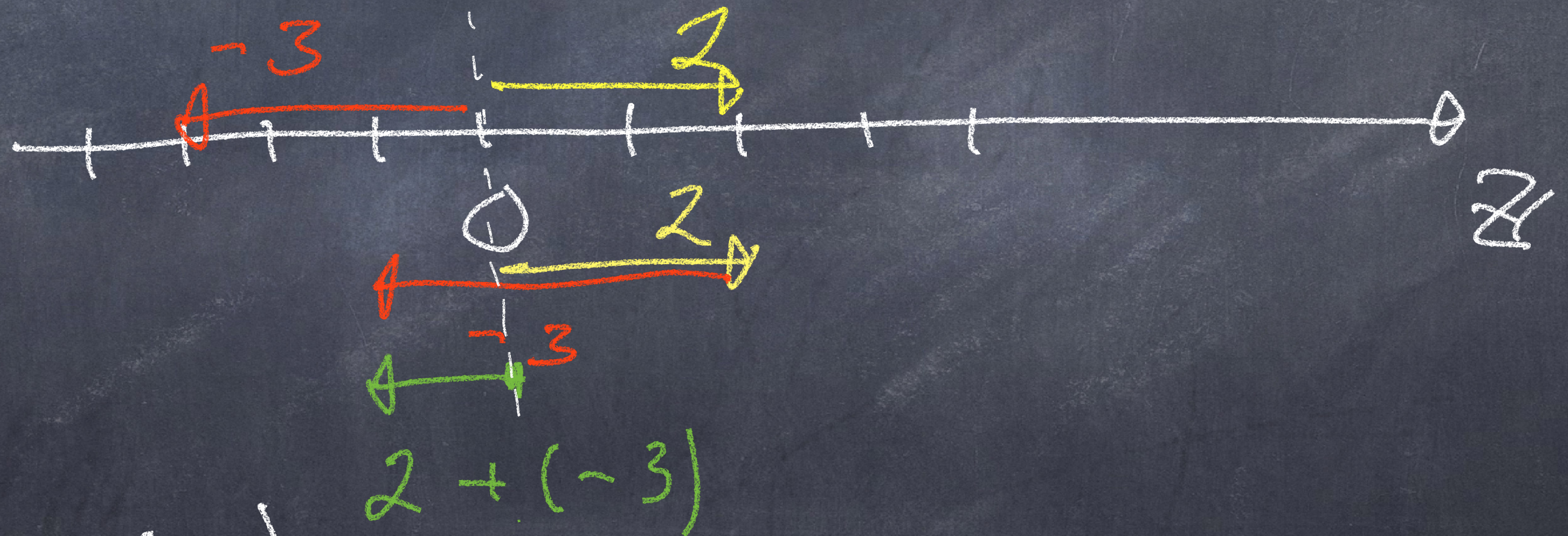


Modell för addition & subtraktion

$$2 + 3$$



$$2 + (-3)$$



$$2 - 3 \stackrel{\text{def}}{=} 2 + (-3)$$

Multiplikation i $\mathbb{Z}$

$$2 \cdot (-3) = -6$$

$$(-2) \cdot 3 = -6$$

$$(-2) \cdot (-3) = 6$$

$$0 \cdot n = 0$$

Vill ha multiplikation
som är

- användbar

(tillämpbar)

- "naturlig"

(Sats A)

Om vi kräver att Sats A ska gälla så
måste

$$\# \quad 1 \cdot (-1) \stackrel{\text{enl}}{=} (-1) \cdot 1 \stackrel{\text{enl}}{=} (-1)$$

$A:3 \qquad A:5$

Följer i så fall att

$$(-1) \cdot n = (-1) \cdot (\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ st}}) \stackrel{\text{enl}}{=} \underset{\text{A6}}{=}$$

$$= (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + \dots + (-1) \cdot 1 = \underbrace{-1 - 1 - \dots - 1}_{n \text{ st}} = -n$$

och att

$$(-m) \cdot n \stackrel{\text{enl.}}{=} \underset{\text{ovan}}{=} (-1) \cdot m \cdot n \stackrel{\text{enl}}{=} \underset{\text{A4}}{=} (-1) (m \cdot n) \stackrel{\text{enl}}{=} \underset{\text{ovan}}{=} -mn$$

$$* \quad 0 \cdot 1 \stackrel{\text{enl}}{=} 1 \cdot 0 \stackrel{\text{enl}}{=} 0$$

A:3 AS

Det följer då också att

$$* \quad 0 \cdot n = 0(1 + 1 + \dots + 1) \stackrel{\text{enl}}{=}_{A6} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + \dots + 0 \cdot 1$$

$$\stackrel{\text{enl}}{=} 0 + 0 + \dots + 0 \stackrel{\text{enl}}{=} 0$$

ovan def. av 0

$\forall i$ definierar därför för $n, m \in \mathbb{N}$

$$(-n) \cdot (m) = (n) \cdot (-m) \stackrel{\text{def}}{=} -(n \cdot m)$$

$$0 \cdot n = n \cdot 0 = 0 \cdot (-n) = (-n) \cdot 0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$(-n) \cdot (-m) = ?$

speciellt $(-1) \cdot (-1) = ?$

$$\text{Sätt } (-1) \cdot (-1) = X.$$

$$X - 1 = (-1) \cdot (-1) - 1 =$$

$$\stackrel{\text{end}}{=} (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \stackrel{\text{end}}{=} \underset{\text{over}}{AG}$$

$$= (-1) \left((-1) + 1 \right) = (-1) \cdot 0 \stackrel{\text{end}}{=} \underset{\text{over}}{0}$$

$$\text{Så } X - 1 = 0, \text{ dvs } X = 1$$

$$\text{dvs } (-1) \cdot (-1) = 1$$

Vä definierar därför

$$(-1) \cdot (-1) \stackrel{\text{def.}}{=} 1$$

$$(-n) \cdot (-m) \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot m$$

OBS: Multiplikation med (-1)
 motsvarar rotation 180°



$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}, \quad \left(\begin{array}{l} \text{de} \\ \text{rationella} \\ \text{talet} \end{array} \right)$$

där $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$ OMM $n \cdot q = m \cdot p$

dvs $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$ OMM det finns $k \in \mathbb{Z}$,

$k \neq 0$, s. a. $\begin{cases} n = k \cdot p \\ m = k \cdot q \end{cases}$.

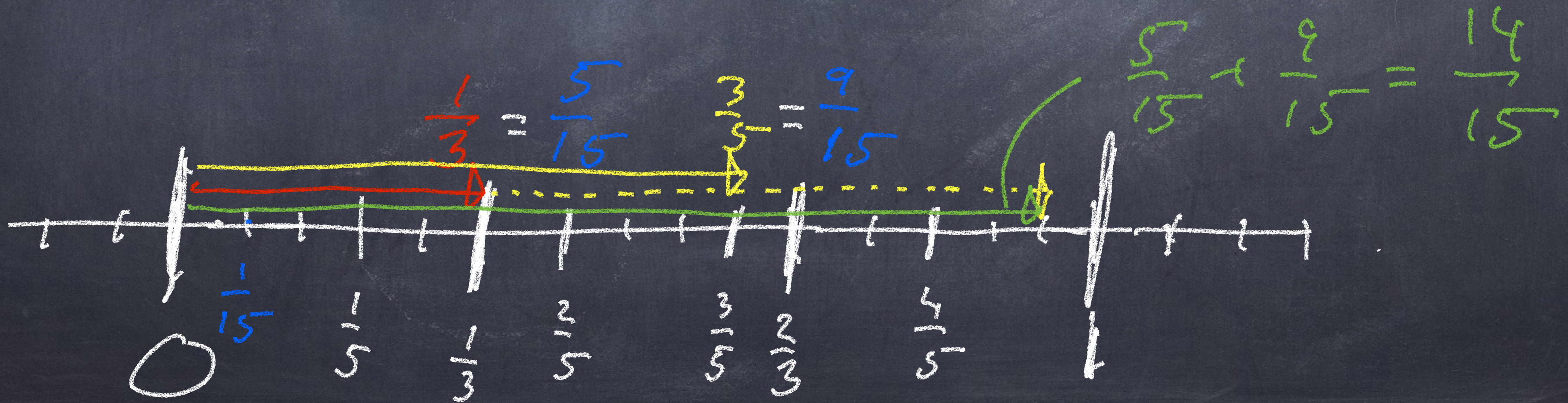
Example.

$$\frac{2}{3} = \frac{14}{21} \quad \text{by}$$

$$\frac{5}{8} \neq \frac{21}{32} \quad \text{by}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Ex: $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \frac{5}{15} + \frac{9}{15} = \frac{14}{15}$



Beräkna

$$\cdot \quad \frac{7}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{28 - 3}{12} = \frac{25}{12}$$

$$\cdot \quad \frac{11}{170} + \frac{7}{72} = \frac{11 \cdot 72 + 7 \cdot 170}{72 \cdot 170}$$

..... men enkla med MGM

$$\frac{11}{170} + \frac{7}{72} =$$

$$= \frac{36 \cdot 11}{36 \cdot 170} + \frac{85 \cdot 7}{85 \cdot 72}$$

$$= \frac{396 + 595}{6120}$$

$$= \frac{991}{6120}$$

$$170 = 10 \cdot 17 = 2 \cdot 5 \cdot 17$$

$$72 = 8 \cdot 9 =$$

$$= \underline{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \underline{3 \cdot 3}$$

$$\text{MGM}(72, 170)$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$$

$$= 6120$$

$$= 170 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 170 \cdot 36$$

$$= 72 \cdot 5 \cdot 17 = 72 \cdot 85$$

Multiplication in $\mathbb{Q}$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

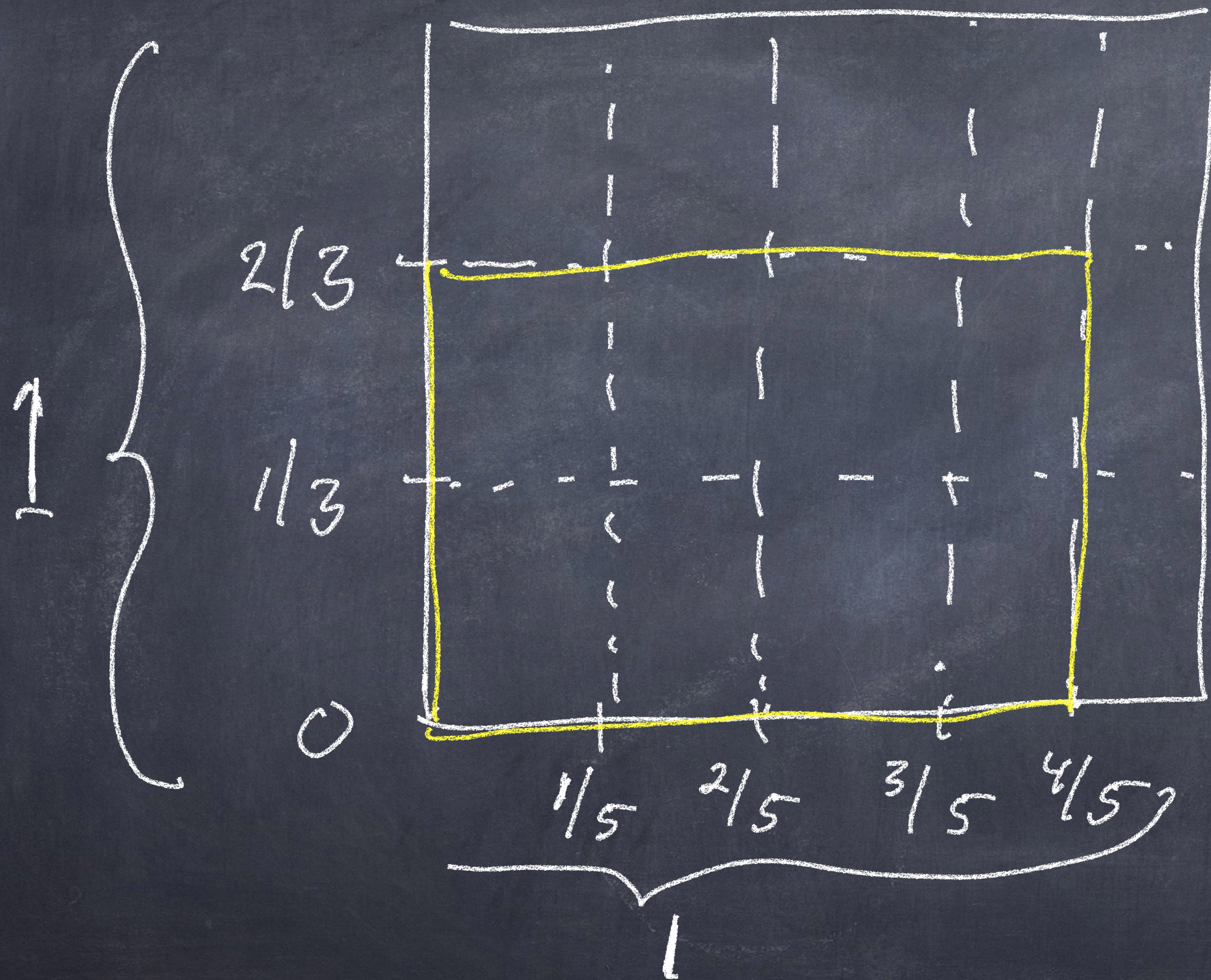
Multiplication in $\mathbb{Q}$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 2$$

"vill ha" area following:
vi

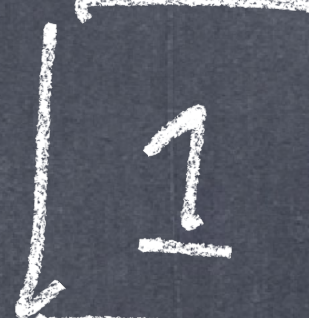


$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$$



$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} =$$

Area()

= Andel av 

= Antal ruter
Totalt antal ruter

==

Division i $\mathbb{Q}$

$$\frac{\frac{n}{m}}{\frac{p}{q}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n}{m} \cdot \frac{q}{p}$$

Motivering: $\frac{n}{m} \cdot \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ så är $\frac{n}{m} \div \frac{p}{q}$

$$\frac{\frac{n}{m}}{\frac{p}{q}} = \frac{\frac{n}{m} \cdot k}{\frac{p}{q} \cdot k} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ta} \\ k = m \cdot q \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\frac{n}{m} \cdot m \cdot q}{\frac{p}{q} \cdot m \cdot q} = \frac{nq}{pm}$$

Beräkna $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}$$

Förenkla $\frac{a^2b + ab^2}{a^2 - b^2}$

$$a^2 - b^2$$

$$ab$$

$$a - b$$

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}}{\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}}$$

$=$

$$\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 4} \cdot \frac{\cancel{4} \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{28}{45}$$

$$\frac{\frac{a^2b + ab^2}{a^2 - b^2}}{\frac{ab}{a - b}}$$

$$= \frac{a^2b + ab^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a - b}{ab}$$

$$= \frac{\cancel{ab}^{\text{green}}(\cancel{a+b}^{\text{red}}) \cdot (\cancel{a-b}^{\text{yellow}})}{(\cancel{a+b}^{\text{red}})(\cancel{a-b}^{\text{yellow}}) \cdot \cancel{ab}^{\text{green}}} = 1$$

Obs:

$$\frac{\left(\frac{r}{s}\right)}{t} \neq \frac{\frac{r}{\left(\frac{s}{t}\right)}}{1}$$

Division of
association

$$\frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{3}$$

Ge en Folksamning till

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 5 \\ \hline 1 \\ \hline 7 \end{array}$$

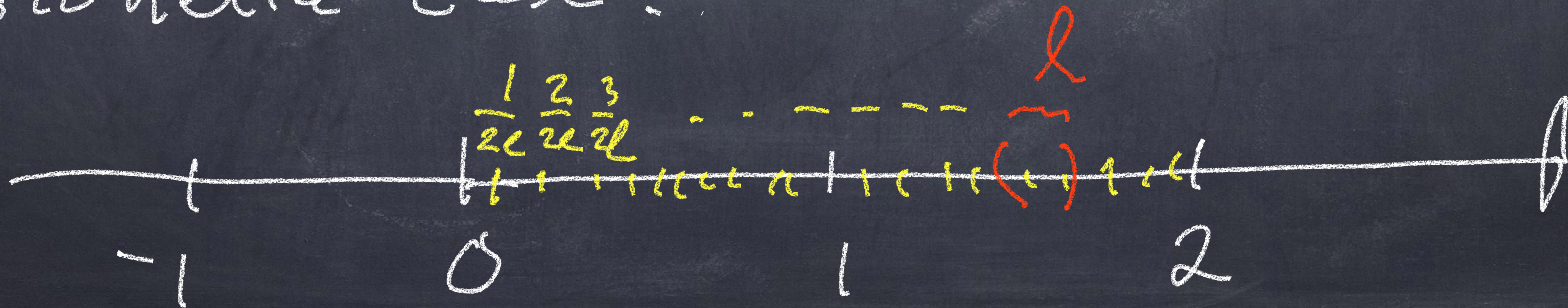
" Hur långt kommer
man med en moped

Som drar $\frac{1}{7}$ l/mil,

om det finns

$\frac{9}{5}$ l i tanken? "

De rationella talen $\mathbb{Q}$
 är täta på talaxeln,
 dvs. varje intervall på talaxeln,
 hur litet det än är, innehåller
 rationella tal.



Men det finns punkter på
talaxeln som inte beskrivs av
rationella tal. T.ex.

SATS: Det finns något $r \in \mathbb{Q}$

sådant att $r^2 = 2$

dvs. $\sqrt{2}$ är inte ett rationellt tal.

Antag att motsatsen, dvs anta att det finns $r \in \mathbb{Q}$ s.a. $r^2 = 2$.

Skriv $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ utan gemensam faktor, dvs $\frac{p}{q}$ förkortat så långt det går.

1 så fall skulle gälla att:

— ϕ

$$r^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow \underline{p^2 = 2q^2}$$

$$\Rightarrow 2 \mid H.L. \Rightarrow 2 \mid V.L. = p^2$$

$$\Rightarrow 2 \mid p \quad (\text{Eg om } p \text{ ej innehåller faktor 2, gör ej heller } p^2 \text{ det})$$

$$\Rightarrow p = 2n, n \in \mathbb{N}.$$

Vi sätter in $p = 2n$ i $p^2 = 2q^2$:

$$(2n)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4n^2 = 2q^2 \Rightarrow 2n^2 = q^2$$

$$\Rightarrow 2 \mid q \quad (\text{med samma resonering som ovan})$$

Vårt antag att $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ där

$p, q \in \mathbb{N}$ saknade gemensam faktor.

$$\Rightarrow \underline{2 \mid p} \geq \underline{2 \mid q}$$

Mod sägelse! Vårt antagande
måske ha varit fel!

Alltså finns inget $r \in \mathbb{Q}$
sådant att $r^2 = 2$.

Def fems många irrationella

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$

(Om $n \in \mathbb{N}$, så $\sqrt{n} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$)

$\pi, e, \dots$

$\{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
= "Mängden av alla irrationella tal"

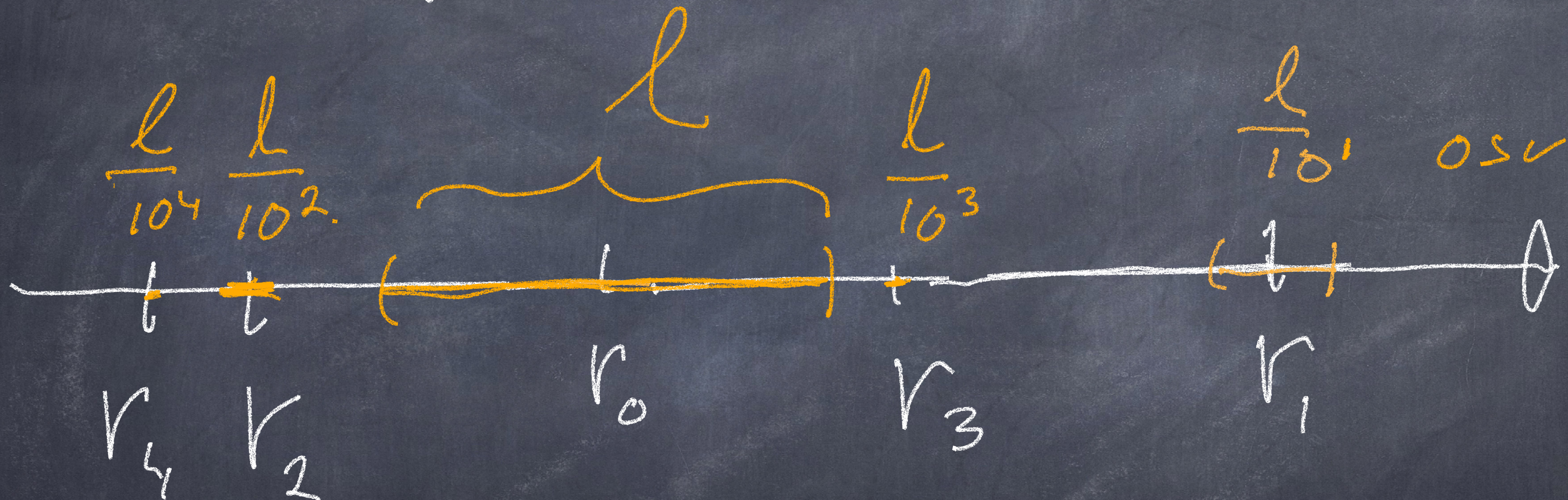
Bonus bilder om
mängderna $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
som delmängder av $\mathbb{R}$

Examineras ej

• De rationella talen $\mathbb{Q}$
är en uppräknelig mängd, dvs
de har samma kardinalitet som
de naturliga talen

• De irrationella talen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
är en överuppräknelig mängd

Låt $r_0, r_1, r_2, \dots$ vara en approximation
av Q . Vi kan "täcka över" Q med interval



$$L = l + \frac{l}{10} + \frac{l}{10^2} + \dots = l \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right)$$

$$L = l \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right)$$

$$= l \cdot 1.11111\dots$$

Vi kan välja l hur litet som helst,
och följaktligen få L hur litet som
helst.

VI KAN TÄCKA ÖVER ALLA
RATJONELLA TAL MED INTERVALL VARS
SAMMANLAGDA LÄNGD $\leq$ ÄR
HUR LITEN SOM HELST.

(En konsekvens av uppräknelighet)

Man säger att mängden $\mathbb{Q}$
har MÄTT NOLL

- Varje delintervall av talaxeln $\mathbb{R}$ innehåller såväl rationella som irrationella tal, dvs Gärde
 $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ är täta i $\mathbb{R}$

- $\mathbb{Q}$ är en uppräknelig mängd och har som konsekvens "MÅTT NOLL"
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ är en överuppräknelig mängd, och har "FULLT MÅTT"