

Föreläsning 3

SF1001 HT20, 27/8

LOGIK



Logiska symboler

Logiska resonemang



# Logik —

samband mellan **utsagor** (påståenden)

Ex

$$x \geq 2$$



$$x^2 \geq 4$$

$$x^2 \geq 4$$



$$x \geq 2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$



$$x = 3 \vee x = 1$$



Utsagor har ett sanningsvärde

dvs de är **SANNA** eller **FALSKA**

---

\* Malmö är Sveriges huvudstad

**FALSK UTSAGA**

\* Stockholm är Sveriges huvudstad

**SANN UTSAGA**

\* Stockholm är Sveriges huvudstad

**UTSAGA**



• Det finns oändligt många primtal **SANN UTSAGA**

•  $1+1=3$  **FALSK UTSAGA**

•  $a^2-2ab+b^2$  **EQ** **UTSAGA**

•  $\int_0^1 x^2 dx$  **EQ** **UTSAGA**

•  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$  **SANN UTSAGA**



Slutna utsagor: Beror ej på variabel,  
har ett fixt sanningsvärde, S eller F

Ex:  $0 < 1$ ,  $\pi = 3$

<sup>11</sup>  
Öppna utsagor: Sanningsvärdet beror  
av en variabel i utsagan

Ex:  $x^2 < 1$



Utsagor<sup>2</sup> öppna/slutna<sup>2</sup> Sanna/Falska<sup>2</sup>

---

$$x^2 - 2x + 1$$

∃ UTSAGA

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{ÖPPEN UTSAGA, sann om } x=1$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \text{ÖPPEN UTSAGA sann om } x \neq 1$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 1 \quad \text{SLUTEN, sann alla } x$$

$$x^2 - 2x + 1 < 0 \quad \text{SLUTEN, FALSK alla } x$$

( $x$  förutsätts vara reellt tal. under förstått pga  $\geq$ )

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$\begin{cases} = 0 & \text{om } x=1 \\ \geq 1 & \text{om } x \neq 1 \end{cases}$$



# Implikation



- Används  mellan två utsagor

Exempel:

•  $x=1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

" Om  $x=1$  så är  $x^2 - 3x + 2 = 0$  "

"  $x=1$  implikerar att  $x^2 - 3x + 2 = 0$  "  
med för



$$x=1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

" $x=1$  är ett tillräckligt villkor  
för  $x^2 - 3x + 2 = 0$ "

" $x^2 - 3x + 2 = 0$  är ett  
nödvändigt villkor för  $x=1$ "

---

Kan också skrivas

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftarrow x=1$$



Om  $P$  och  $Q$  är utsagor

är  $P \Rightarrow Q$  en ny utsaga

"Om  $P$  är sann så är  $Q$  sann"

$P \Rightarrow Q$  är en  
ÖPPEN utsaga

Sanningsvärdestabell

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|-----|-----|-------------------|
| S   | S   | S                 |
| S   | F   | F                 |
| F   | S   | S                 |
| F   | F   | S                 |



Vilka av följande är sanna implikationer?

•  $x = 2 \Rightarrow x^2 = 5$  FALSK

•  $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$  SANN

•  $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$  FALSK

•  $x^2 = 4 \Rightarrow 2 \text{ eller } -2$  MENINGSLÖS  
→ EJ UTSAGA

•  $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ eller } x = -2$  SANN



Mycket vanligt MISSbruk av  
"⇒" vid förenklingar/beräkningar:

$$\int_0^1 x^2 dx \Rightarrow \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \Rightarrow \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1) \Rightarrow (x^2-1)(x^2+1) \Rightarrow (x^4-1)$$



# Ekvivalens



Om  $P$  och  $Q$  är utsagor sådana att

$P \Rightarrow Q$  och  $Q \Rightarrow P$ , så sägs

$P$  och  $Q$  vara **ekvivalenta**

$$P \Leftrightarrow Q$$



Exempel  $2x = 10 \iff x = 5$

" $2x = 10$  är ekvivalent med att  $x = 5$ "

" $2x = 10$  om och endast om  $x = 5$ "  
OMM (eng IFF)

" $2x = 10$  är ett nödvändigt och  
tillräckligt villkor för  $x = 5$ "



$P \leftrightarrow Q$  är en öppen utsaga

Sanningsvärdestabell

| P | Q | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|-----------------------|
| S | S | S                     |
| S | F | F                     |
| F | S | F                     |
| F | F | S                     |



Vilka av följande ekvivalenser är sanna?

- $x = 2 \iff x^2 = 4$  FALSK
- $x = 2 \iff x^3 = 8$  SANN
- $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2}$  FALSK
- $e^x = 1 \iff x = 0$  SANN



Exempel: Lös ekvationen  $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff \underbrace{(x+1)^2 - 4}_{= x^2 + 2x - 3} = 0$$

$$\iff (x+1)^2 = 4 \iff \underbrace{(x+1) = \pm 2}_{\text{"2 eller -2"}}$$

$$\iff x = -1 \pm 2 \iff x = -3 \text{ eller } x = 1$$

---

vi har ekvivalens i varje steg

$$\text{dvs } x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x = -3 \text{ eller } x = 1$$



Ex: Lös ekvationen  $\sqrt{3-2x} = x$ .

$$\sqrt{3-2x} = x \implies (\sqrt{3-2x})^2 = x^2 \implies (3-2x) = x^2$$

↑ endast implikation här  
p.g.a.  $(a=b \implies a^2=b^2)$

$$\implies x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \text{enligt} \quad \implies x = -3 \text{ eller } x = 1.$$

föregående gilt

---

Vi har visat  $\sqrt{3-2x} = x \implies x = -3$  eller  $x = 1$ ,  
ej ekvivalens. Dvs OM  $\sqrt{3-2x} = x$  så måste  $x = -3$  eller  $x = 1$   
Men prövning LOGISKT NÖDVÄNDIGT FÖR att se om dess är lösning.



# Negation

Exempel: Om  $P$  är utsagan

" $X = 1$ " är  $\neg P$  ("icke  $P$ ")

utsagan

" $X \neq 1$ "

$\neg P$  är en sanningsvärdes tabell  
ny utsaga

| $P$ | $\neg P$ |
|-----|----------|
| S   | F        |
| F   | S        |



$$\frac{P}{x=1}$$

$$x > 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\underline{z \neq 0}$$

$$\frac{\neg P}{x \neq 1}$$

$$\underline{x \leq 1}$$

$$\underline{x^2 - 2x + 1 \neq 0}$$

$$\underline{z = 0}$$



# Logikens "och" & "eller"

$P \wedge Q$  "P och Q"

sant om både P och Q sanna

$P \wedge Q$  är en

logisk utsaga

sanningsvärdestabel

| P | Q | $P \wedge Q$ |
|---|---|--------------|
| S | S | S            |
| S | F | F            |
| F | S | F            |
| F | F | F            |



$P \vee Q$  "P eller Q"  
 Sant om minst en av P eller Q  
 är sanna.

Sanningsvärdestabell

| P | Q | $P \vee Q$ |
|---|---|------------|
| S | S | S          |
| S | F | S          |
| F | S | S          |
| F | F | F          |



Example:

$$\bullet \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \vee x = -2$$

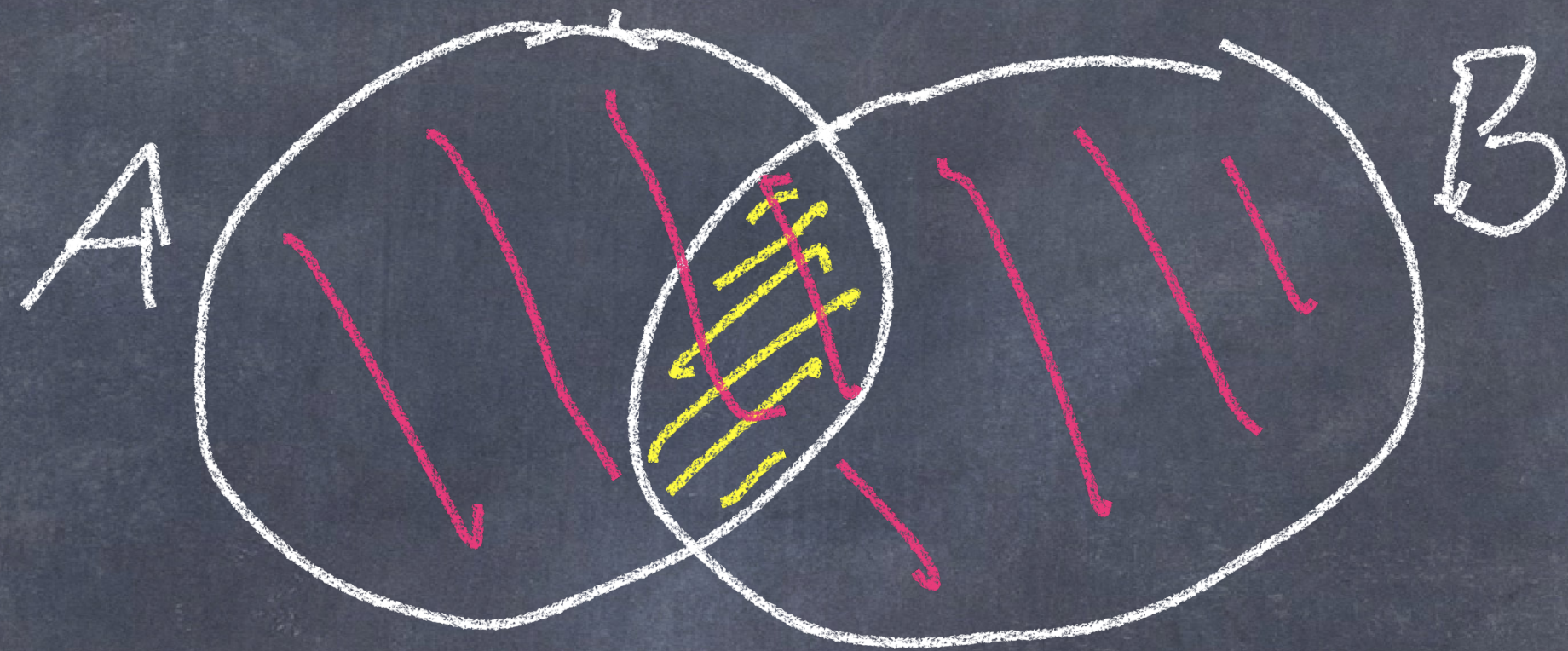
$$\bullet \quad x^2 = 4 \wedge x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$$\bullet \quad x \geq 1 \vee x \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \quad [-1 < x < 1]$$



$$[x \in A \wedge x \in B] \iff x \in A \cap B$$



$$[x \in A \vee x \in B] \iff x \in A \cup B$$



# Kvantifikatorer

✓ "för alla"

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \sin n\pi = 0$$



$\exists$

"det existerar"

$$\exists x \in [0, 1], \quad 2x = 1$$

$\nexists$

"det existerar inte"

$$\nexists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \leq 0$$



# Kvantifikatorer & negationer

Om  $P$  är påstående

"Alla katter har svans"

Vad är  $\neg P$ ?

$\neg P$  är "Det finns (minst en katt utan svans"



Om  $Q$  är påståendet

"Det finns (minst en katt  
utan svans"

Vad är  $\neg Q$ ?

$\neg Q$  är då påståendet

"Alla katter har svans"



$G = \text{Goldbach's } \underline{\text{förmödan}};$

Alla jämna tal större än två  
kan skrivas som summan  
av två primtal

Negationen till  $G$ :

$\neg G$  är: "Det finns ett primtal  
som inte kan skrivas som summa av två primtal"



$$P: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

$$\neg P: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$$

---

$$Q: \exists r \in \mathbb{Q}, r^2 = 2$$

$$\neg Q: \forall r \in \mathbb{Q}, r^2 \neq 2$$



Om  $P$  är utsagan " $\forall x$  har egenskap  $S$ ,"

Så är  $\neg P$  utsagan " $\exists x$  som saknar egenskap  $S$ "

---

Om  $Q$  är utsagan " $\exists x$  som har egenskap  $S$ ,"

Så är  $\neg Q$  utsagan " $\forall x$  saknar egenskap  $S$ "



Symbolen  $\perp$ , "falsum"  
skär för slutet utsaga som är falsk.

$$\underline{\text{Ex. 1}} \text{ (Alltid sant)} (A \wedge \neg A) \iff \perp$$

$$\underline{\text{Ex. 2}} \text{ (Motsägelse-  
bevis)} (\neg P \implies \perp) \implies P$$