

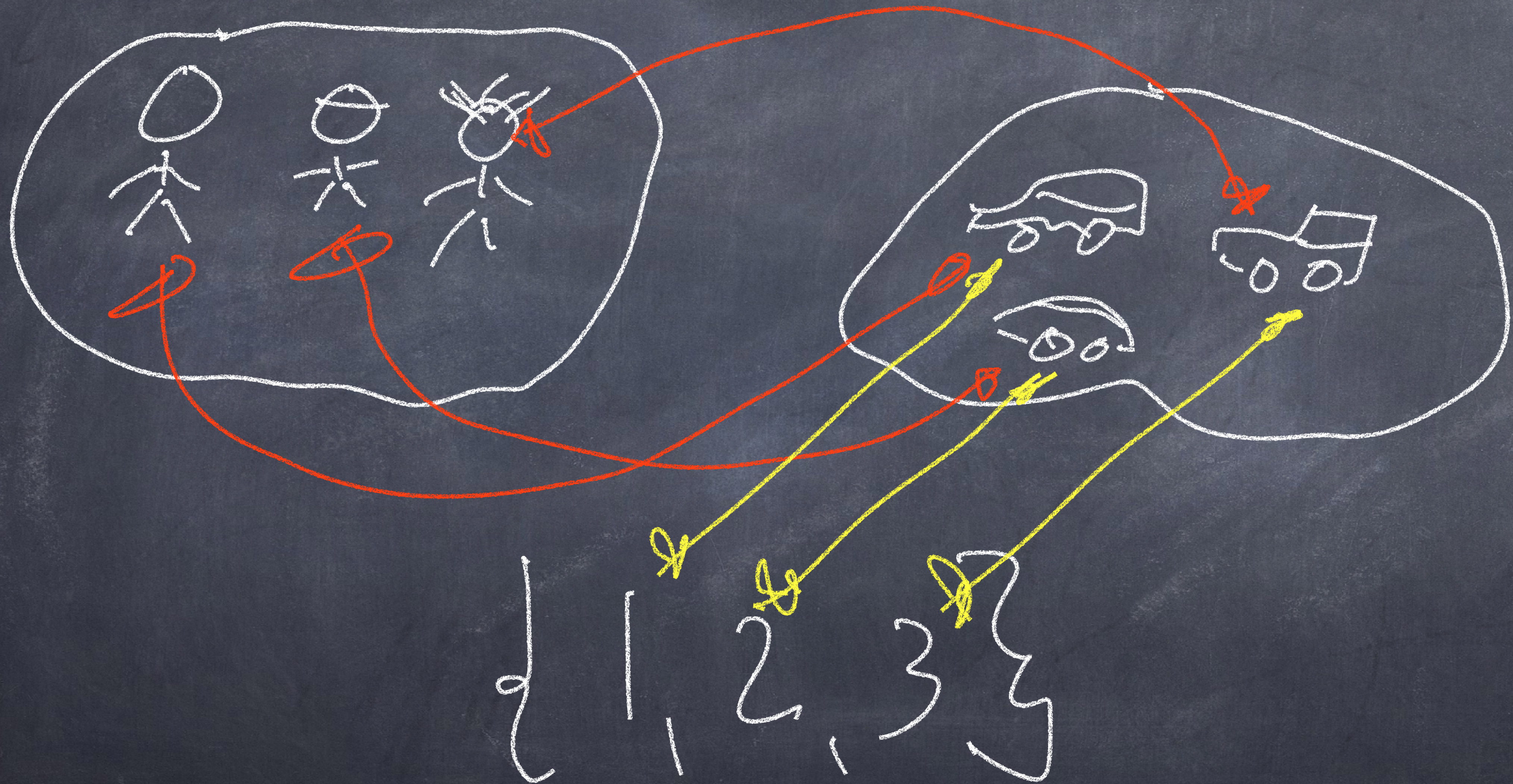
SIF1661 Perspektiv på Matematik HT20

Föreläsning 1

- Naturliga tal

- Primtal

Vad "är" ett tal?



$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

de naturliga talen.

Kan ses som
"egenskaper" hos mängder.

Representation av naturliga tal

"Streckkod"

Romerska siffror

Hindu-Arabiska siffror

I
II
III
IIII
IIII = ~~IIII~~
~~IIII~~ I

·
,
,
,
,
,
|

I
II
III
IIII
V
VI
·
X
L
C
D
M
MM ~~X~~ ~~I~~

1
2
3
4
5
6

10
50
100
500
1000

1000 + 1000
+ 10 - 1 + 10 = 2019

Positionssystem

Decimalt (bas tio)

10 st siffror : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Exempel

$$(72038)_{(tio)} =$$

$$= 7 \cdot (\underline{tio})^4 + 2 \cdot (\underline{tio})^3 + 0 \cdot (\underline{tio})^2 + 3 \cdot (\underline{tio}) + 8$$

$$= 7 \cdot (\underline{tiosusen}) + 2 \cdot (\underline{tusen}) + 0 \cdot (\underline{hundra}) + 3 \cdot (\underline{tio}) + 8 \cdot (\underline{ett})$$

$$= 70000 + 2000 + 0 + 30 + 8$$

Platsvärden

Binärt (bas två)

Två symboler; 0, 1

Exempel:

$$(10110)_{\text{två}} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Platsvärden: $2^4 2^3 2^2 2^1 2^0$

$$= (1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1)$$

$$= (22)_{\text{tio}}$$

Hexadecimalt (bas sexton)

Sexton stycken symboler:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 samt

$A = (10)_{\text{tio}}$, $B = (11)_{\text{tio}}$, $C = (12)_{\text{tio}}$, $D = (13)_{\text{tio}}$, $E = (14)_{\text{tio}}$, $F = (15)_{\text{tio}}$

Exempel:

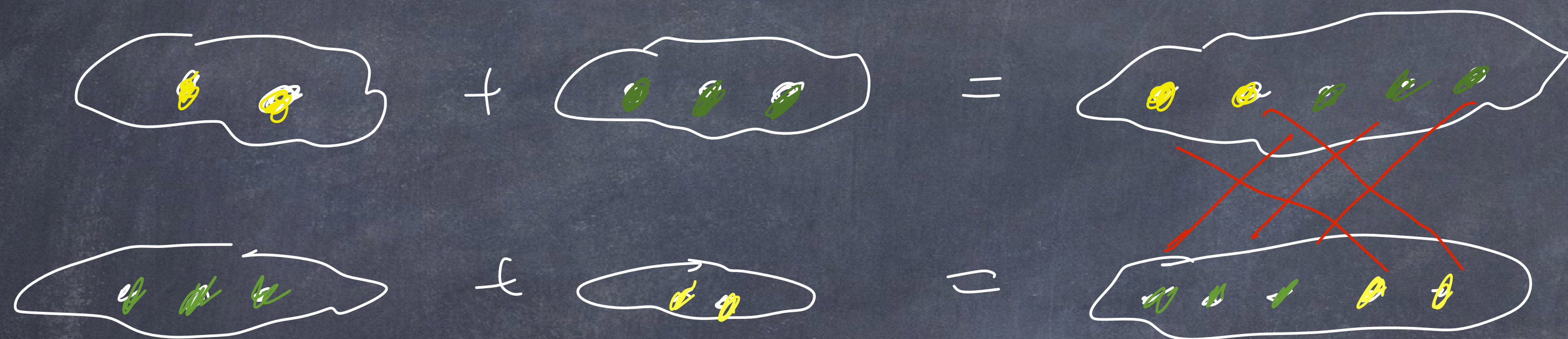
$$(2C4)_{\text{sextan}} = 2 \cdot 16^2 + C \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0$$

$$= (2 \cdot 256 + 12 \cdot 16 + 4)_{\text{tio}}$$

$$= (708)_{\text{tio}}$$

Räknesoperationer i $\mathbb{N}$

• Addition



$$2 + 3 = 5$$

$$3 + 2 = 5$$

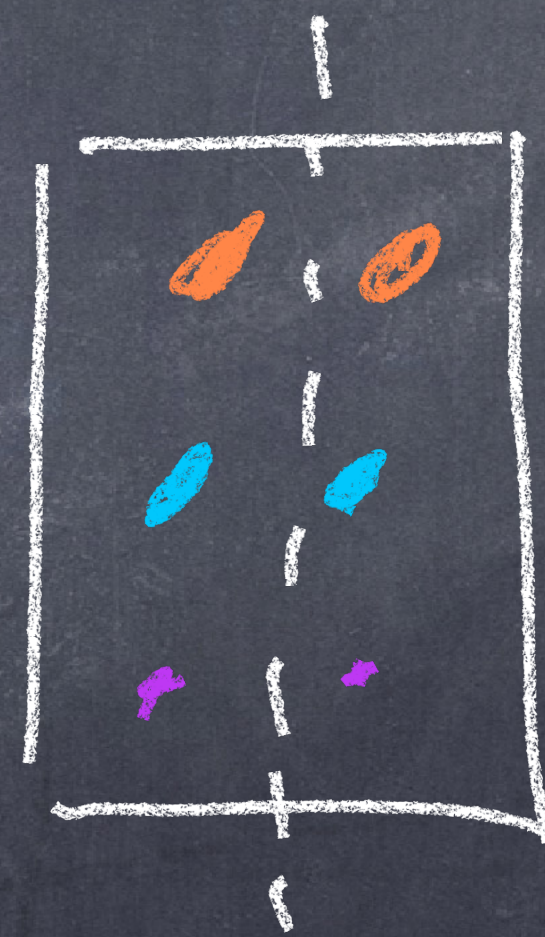
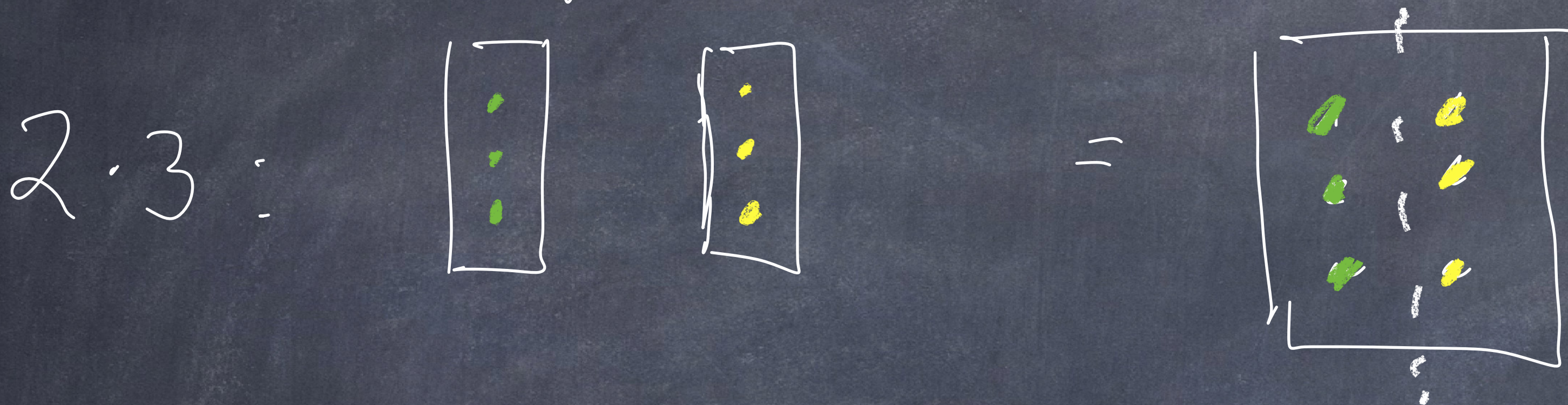
"Lillhör"

$$m + n = n + m$$

$$n, m \in \mathbb{N}$$

Rechnoperationen in $\mathbb{N}$

Multiplikation



$$m \cdot n = n \cdot m, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

SATS: Om m, n och p är
naturliga tal så gäller att

- (1) $n + m = m + n$ (kommutativa lagen för add.)
- (2) $(n + m) + p = n + (m + p)$ (associativ lagen för add.)
- (3) $n \cdot m = m \cdot n$ (kommutativa lagen för mult.)
- (4) $(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$ (associativa lagen för mult.)
- (5) $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$ (1 är multiplikativt enhets-
element)
- (6) $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$ (distributiva lagen:
multiplikation distribuerar
över addition)

Exempel på

(4) Associativa lagen för multiplikation

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$$

$$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

(6) Distributiva lagen.

$$2(3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$$

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = 14$$

Primtal

Definition Ett naturligt tal $p > 1$ kallas ett primtal om p inte är jämnt delbart med något annat tal än 1 och sig självt.

Alt: p är ett primtal om
det inte finns några naturliga tal
 n och m , $1 < n, m < p$, sådana att $p = n \cdot m$

De första primtalen:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Primfaktorisera följande tal.

Är något av dem ett primtal?

139

847

139

$n | k$ "n delar k"
 $n \nmid k$ "n delar inte k"

• Räkner att pröva
att dela med alla primtal $\leq \sqrt{139} < 12$

• $2 \nmid 139$

$3 \nmid 139$ (Eg $1+3+9=13$, $1+3=4$, $3 \nmid 4$)

$5 \nmid 139$

$7 \nmid 139$ (Eg $\frac{139^6}{7} = 19 + \frac{6}{7}$)

$11 \nmid 139$

SÅ 139 ÄR PRIMTAL

847

2 | 847

3 | 847

5 | 847

($8+4+7=19$, $1+9=10$, ~~3~~ 10)

7 | 847

69

$847 = 7 \cdot 121$

58

847

ej

primal

$847 = 7 \cdot 11^2$ (perfekterisierig)

SATS: Varje naturligt tal

$n \geq 2$ kan skrivas som en
produkt av primtal på
ett och endast ett sätt,

(bortsett från faktorernas ordning)

Ex: $7 = 7$, $847 = 7 \cdot (11)^2$

Skriv 12600 som en
produkt av primtal!

SATS: Det finns oändligt
många primtal

Beriset bygger på följande ide:

- Tag en lista med primtal
vilken som helst, t.ex $[2, 5, 11, 19]$
- Bilda produkten av primtalen
i listan och addera 1
$$m = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 + 1$$
- Det nya talet m är nu
inte delbart med något av
primtalen i listan

Visa att $m = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 + 1$
inte är jämnt delbart med
något av talen 2, 5, 11 eller 19.
(Tips: Beräkna INTE produkten $2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19$)

$$\begin{aligned} \text{Tex ger } \frac{m}{5} &= \frac{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 + 1}{5} = \\ &= \frac{2 \cdot \cancel{5} \cdot 11 \cdot 19}{\cancel{5}} + \frac{1}{5} = \underbrace{\text{heltal}}_{\text{ej heltal}} + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Alltså måste m
innehålla andra primfaktorer
än de som finns i listan

i exemplet är

$$m = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 + 1 = 2091$$

och

$$2091 = 3 \cdot 697 = 3 \cdot 17 \cdot 41$$

Bevis för att det finns oändligt
många primtal:

Vi antar motsatsen och visar
att det leder till en orimlighet.

Antag att det finns ändligt
många primtal, $N \in \mathbb{N}$,

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_N$
Bildat talet

$$M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_N + 1$$

$m = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_N + 1$ är ej delbart med ugt. p_k ty

$$\frac{m}{p_1} = \underbrace{p_2 \cdot \dots \cdot p_N}_{\text{heltal}} + \frac{1}{p_1}$$

rest, ej heltal

$$\frac{m}{p_2} = p_1 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_N + 1/p_2$$

osv.

Alltså innehåller m ingen av primfaktorerne

$p_1, p_2, \dots, p_N$. Alltså finns det fler primtal än så,
vilket mot säger vårt antagande.

- Antagandet "Det finns N st primtal" leder till slutsatsen "Det finns fler än N st primtal".
- Detta är en motsträidelse.
- Alltså måste antagandet vara falskt (fört varje val av N)
- Alltså finns det oändligt många primtal

Lite mer om primtal - orientering

1.

Primtals satsen

- hur tätt ligger primtalen
på talaxeln?

2.

Goldbachs förmodan

3.

Primtals tvillingar

Hur lätt ligger primtalen?

Låt $\pi(n)$ = "antalet primtal $\leq n$ "

$A(n) = \frac{\pi(n)}{n}$ = "andelen primtal $\leq n$ "

n	$\pi(n)$	$A(n)$	$Q(n) = \frac{1}{A(n)}$
2	1	1/2	2/1 = 2
3	2	2/3	3/2 = 1.5
4	2	2/4	4/2 = 2
5	3	3/5	5/3 $\approx$ 1.67
6	3	3/6	6/3 = 2

n	$\pi(n)$	$A(n)$	$Q(n) = \frac{1}{A(n)} = \frac{n}{\pi(n)}$	
2	1	1/2	2	
3	2	2/3	$3/2 = 1.5$	
4	2	1/2	2	
5	3	3/5	$5/3 \approx 1.67$	
6	3	1/2	2	
7	4	4/7	$7/4 = 1.75$	
...	...	...	...	
104	1229	$\frac{1229}{10000}$	$\frac{10000}{1229} \approx 8.1$	OKN1NG
105	...	...	≈ 10.4	2.3
106	...	...	≈ 12.7	2.3
				050

så verkar som att för stora tal m är

$$Q(10^{m+1}) - Q(10^m) \approx 2.3 \approx \ln 10$$

dvs , med $M = 10^m$,

$$Q(10M) - Q(M) \approx \ln 10, \quad M \text{ stort.}$$

Jfr Q med $\ln$:

$$\ln(10M) - \ln(M) = \ln\left(\frac{10M}{M}\right) = \ln 10$$

$$\text{så } A(n) = \frac{1}{Q(n)} \approx \frac{1}{\ln(n)}, \quad n \text{ stort}$$

Primtalsatsen

Låt $\pi(n)$ vara antal primtal
mindre än eller lika med n .

och låt $A(n) = \frac{\pi(n)}{n}$. Då gäller att

$$A(n) \approx \frac{1}{\ln n}, \quad n \text{ stort.}$$

Mer precist gäller att

$$\frac{A(n)}{1/\ln n} \rightarrow 1 \quad \text{när } n \rightarrow \infty.$$

Andal

$$\text{primtol} = \pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$$

Andal primtal

$$A(n) \approx \frac{1}{\ln n}$$

h

Goldbachs förmodan^(*) (1742)

Alla jämna naturliga tal
större än 2, kan skrivas
som summan av två primtal

"Förmodan" = Påståendet man tror är
sant, men som ej är bevisat

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 5 + 5$$

$$12 = 5 + 7$$

$$14 = 7 + 7$$

...

$$20 = 7 + 13$$

$$22 = 11 + 11$$

$$24 = 11 + 13$$

...

2 2 2

Goldbachs förmödan, svag form

(Bevisades 2013)

Varje udda tal större än 5
kan skrivas som en summa
av tre primtal

Primtals tvillingar

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

Om Gårde talen p och $p+2$
är primtal kallas detta talpar

för PRIMTALSTVILLINGAR

Primtalstvilling hypotesen

Det finns oändligt många tal p
s.a. Gåde p och $p+2$ är primtal

SATS (2013-14): Det finns något tal

D sådant att Gåde p och $p+D$
är primtal för oändligt många p .

* Man har visat att $D \leq 246$

* $D=2$ skulle ge primtalstvillinghypotesen