

Flervariabelanalys

En lätt introduktion

Henrik Shahgholian¹

¹Detta är första utkastet som kommer att successivt förfinas under VT19. När en ny version kommer så uppdateras detta på kurswebbsidan. Eventuella stav- tryck-, och räknefel får gärna meddelas per epost till henriksh@kth.se

Innehåll

Förord	i
0.1. Vad handlar kursen om och vad ska vi lära oss	i
Förkunskaper	1
0.2. Linjär Algebra (en översikt)	1
0.3. Envariabel Analys (en översikt)	2
Modul 1. $\mathbb{R}^3$ -Geometri och funktioner av flera variabler	3
1.1. Analytisk geometri i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$	3
1.2. Vektorvärda funktioner i en variabel	11
1.3. Tillämpningar av vektorderivering	13
1.4. Kurvor och parametriseringar	13
1.5. Funktioner i flera variabler	17
1.6. Gränsvärden och kontinuitet	21
1.7. Övningsuppgifter (Gamla Tentauppgifter)	24
Modul 2. Partiella derivator och linjär approximation	31
2.1. Partiella derivator	31
2.2. Högre ordningens partiella derivator	35
2.3. Linjär approximation, differentierbarhet och differentialer	38
2.4. Kedjeregeln	39
2.5. Gradient och riktningsderivator	42
2.6. Övningsuppgifter (Gamla Tentauppgifter)	46
2.7. Lösningförslag	55
Modul 3. Tillämpningar av derivator	61
3.1. Implicita funktioner	61
3.2. Taylors formel, Taylorserier och approximationer	65
3.3. Extremvärden	67
3.4. Extremvärden av funktioner med bivillkor	72
3.5. Övningsuppgifter (Gamla Tentauppgifter)	75
3.6. Lösningförslag	86
Modul 4. Multipelintegraler	89
4.1. Dubbelintegraler	89
4.2. Upprepad integration i kartesisiska koordinater	96
4.3. Generaliserade dubbelintegraler: Integration av en obegränsad funktion	96

4.4.	Medelvärdessatsen för dubbelintegraler	97
4.5.	Variabelsubstitution i dubbelintegraler	97
4.6.	Variabelsubstitution: polära koordinater	98
4.7.	Trippelintegraler	99
4.8.	Tolkning av trippelintegraler	100
4.9.	Beräkning av trippelintegraler: Enkla fallet	100
4.10.	Variabelsubstitution i trippelintegraler	100
4.11.	Variabelsubstitution med cylindriska koordinater	101
4.12.	Variabelsubstitution med sfäriska koordinater	102
4.13.	Övningsuppgifter (Gamla Tentauppgifter)	102
4.14.	Facit	111
Modul 5.	Linje och Ytintegraler	113
5.1.	Vektorfält	113
5.2.	Fältlinjer	114
5.3.	Konservativa vektorfält	115
5.4.	Ekvipotentialkurvor och Ekvipotentialytor	116
5.5.	Kurvintegraler av vektorfält	117
5.6.	Kurvintegraler av konservativa vektorfält	119
5.7.	Ytintegraler	121
5.8.	Orienterade ytor och flödesintegraler	123
5.9.	Övningsuppgifter (Gamla Tentauppgifter)	127
5.10.	Facit	132
Modul 6.	Vektoranalys	133
6.1.	Nablaräkning	133
6.2.	Greens formel	136
6.3.	Gauss sats (divergenssatsen)	138
6.4.	Stokes sats	139
6.5.	Övningsuppgifter (Gamla Tentauppgifter)	141
6.6.	Facit	147

Förord

0.1. Vad handlar kursen om och vad ska vi lära oss

Detta material¹ ska varken ersätta eller komplettera kursboken. Syftet med kompendiet är att titta närmare på de mest fundamentala och **enkla** delarna i kursboken utan en stor mängd beskrivande text, formler och satser.

Jag har därför valt att vara fåordig i beskrivandet av det material som presenteras här, då jag utgår ifrån att läsaren har:

- (1) Tagit del av materialet i boken.
- (2) Deltagit vid föreläsningar.
- (3) Övat på en del av uppgifter.

I korthet är denna kurs en fortsättning på Envariabelanalys och den innehåller kursen följande moment

- Funktioner av flera variabler samt vektorvärda funktioner.
- Gränsvärde i olika riktningar (samt kontinuitet)
- Derivering i olika riktningar
- Integration i planet och rymden (area, volym, massa)
- Tillämpningar: optimeringsproblem, flödesberäkningar, arbete, ...

¹Materialet som följer är delvis baserad på Lars Filipssons föreläsningar samt mina egna. Gustav Brage har hjälpt med att skriva in tentamensuppgifterna. Tack er båda.

Förkunskaper

Kursen flervariabelanalys bygger på en del kunskaper och begrepp från tidigare kurser SF1624 Algebra och geometri och SF1625 Envariabelanalys. En förutsättning för lyckad studiegång för denna kurs är att man har motsvarande kunskaper och är rätt förtrogen med begreppen, definitioner och satser. Man ska även kunna hantera en del djupare moment som deriveringar och integration samt att ha en bra intuition för geometrisk tänkande. Följande moment från tidigare kurser ska repeteras av studenten innan kursen startar.

0.2. Linjär Algebra (en översikt)

0.2.1. Moment från Algebra och geometri som man ska behärska är.

- Begreppen vektor, matris, determinant, linjär avbildning, definition och tolkningar
- Begreppet invers: definition, tolkning, räkning och användning
- Elementära räkningar med vektorer, matriser och determinanter
- Skalarprodukt, vektorprodukt, trippelprodukt, räkning och användning, geometri
- Linjer och plan, lösning av linjära ekvationssystem
- Begreppen linjärt beroende / linjärt oberoende, räkning och användning
- Begreppen bas och dimension, basbyte
- Egenvärden och egenvektorer, definition, tolkning och användning
- Diagonalisering av kvadratiska former

0.2.2. Euklidisk geometri i $\mathbb{R}^n$: De euklidiska² rummen $\mathbb{R}^n$. (I de flesta fallen är $n \leq 3$)

- Standardbas: Boken använder $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$,
Lämpligare för tavelpresentation är $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots$
- Punkter i $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

²Varför kallas det euklidiska? Vad finns det för annat rum som inte är euklidiska?

- Avstånd $\|\overrightarrow{P_2P_1}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- Skalarprodukt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_1u_1 + v_2u_2 + \dots + v_nu_n$
- Norm/Längd/Absolutbelopp $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$
- Ortogonalitet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$
- Kryssprodukt (vektorprodukt)
- Linjer och plan

0.3. Envariabel Analys (en översikt)

0.3.1. Moment från Envariabelanalys som man ska behärska är.

- Begreppen funktion, definitionsmängd, värdemängd
- Begreppen gränsvärde, kontinuitet, derivata och integral, definitioner och tolkningar
- Potenslagar, loglagar, trigformler mm elementära samband och räkningar
- Derivation av envariabelfunktioner, inklusive produkt-, kvot- och kedjeregeln
- Integration av envariabelfunktioner, inklusive variabelsubstitution och partiell integration
- Taylors formel i en variabel, inklusive specialfallet linjär approximation
- Max och min av envariabelfunktioner
- Tillämpningar och användningar av derivator och integraler
- Andragskurvorna cirkel, ellips, hyperbel, parabel
- Lösning av linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter