



FX-SKRIVNING 2, MAJ 2021

Tillåtna hjälpmedel: Ett A4-papper med egna *handskrivna* anteckningar, anteckningar på båda sidorna är tillåtet. Inga datorutskriftar och inga miniräknare. Förstås inga smart watches eller andra elektroniska kommunikationsmedel. (I samband med pandemins särskilda omständigheter får ni dock ringa läraren på mobiltelefonen men ni får inte ringa eller kommunicera med någon annan.) Som vanligt krävs fullständiga motiveringar om inget annat anges i uppgiften.

Skrivtid: Skrivtiden är 1 timme och 45 minuter, med början 8.00. Dock så sker inlämningen digitalt och för att härbärgera och lösa eventuella tekniska problem adderas en cirka 30 minuter (15 minuter före och 15 minuter efter) så att inlämning kan ske fram till och med 10.00 och själva skrivningen publiceras omkring kl 7.45. Det betyder inte att ni har extra skrivtid, den pålagda tiden ska användas till att ladda upp filer i den Canvas-quiz som skapats för tentan. Om ni gör detta under skrivningens gång eller efter ni skrivit klart hela skrivningen är dock ert val. Observera att Canvas själv INTE kommer ge några påminnelser om detta, på Canvas ser det ut som om inlämningstiden är mycket senare, men det ska ni bortse ifrån. Skrivtiden *är* 1:45 med inlämning fram till och med 10.00. Planera dock arbetet så att ni inte behandlar några uppgifter efter kl 9.45 utan säkert efter detta klockslag endast ägnar er åt uppladdning av era lösningar. För de med extra skrivtid kan man lämna in fram till och med 11.00 (och efter 10.45 ska ni inte ägna er åt något annat än att ladda upp filer). Det är dock *starkt* rekommenderat att ni lämnar in i mycket god tid eftersom gränsen 10.00 (respektive 11.00) är mycket skarp och kommer att sättas av systemet själv, inte av er klocka, inte av fröken ur, utan av *Canvas*. Så för att vara på säkra sidan, lämna in i mycket god tid. Lösningar inlämnade för sent rättas inte.

Varning: När ni trycker på "Lämna in"/"Submit" så kan inga mer uppgifter laddas upp, var därför helt säker på att du laddat upp ALLT som ska lämnas in innan du trycker på "Lämna in"/"Submit".

Teknisk support: Om det skulle finnas tekniska problem (vilka som helst) som förhindrar inlämningen eller gör det svårt på något vis, *måste* ni kontakta mig i skrivningens tillhörande zoommöte. Det är endast i zoommötet som vi kan lösa problem, troligen genom att något slags alternativ inlämningsprocedur vidtas. Ni kan *inte* på egen hand besluta er för att eposta era lösningar.

1. Logik. Studera nedanstående tre utsagor:

$$(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg(q \oplus r)) \quad (p \rightarrow r) \wedge (r \vee q) \quad r \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

Två av dessa utsagor är ekvivalenta. Den tredje är inte ekvivalent med de andra två. Gör en utredning som visar klart och tydligt vilka två av utsagorna som är ekvivalenta. Din utredning behöver också motivera varför den tredje utsagan inte är ekvivalent med de andra två. Metod är valfri.

Anmärkning: konnektivet $\oplus$ är "exklusivt eller", dvs $q \oplus r$ är sann precis då exakt en av q och r är sanna.

2. Mängdlära. Låt mängderna A, B, C, D vara helt godtyckliga och bilda utifrån dessa mängderna

$$S_1 = (A \cup B) \cap (C \cup D) \quad S_2 = (A \cap B) \cup (C \cap D).$$

Gäller någon generell delmängdsrelation mellan S_1 och S_2 ? Vi frågar oss alltså om någon av relationerna

$$S_1 \subset S_2 \quad \text{eller} \quad S_2 \subset S_1$$

gäller generellt, alltså oberoende av vilka mängderna A, B, C, D är. Om någon (eller båda!) av dessa relationer gäller, bevisa det. Om ingen av dessa relationer gäller generellt, ge exempel på fyra mängder för vilka den ena relationen inte är uppfylld och fyra (kanske andra) mängder för vilka den andra relationen inte är uppfylld.

3. Funktioner. Låt $a \in \mathbb{R}$ och $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktionen $f(x) = ax$. Visa att funktionen är injektiv om och endast om den är surjektiv.

4. Inledande talteori. Antag att $\gcd(a, 4) = \gcd(b, 4) = 2$. Beräkna $\gcd(a + b, 4)$.

Ledning: att $\gcd(a, 4) = 2$ betyder att $2|a$ men att $2^2 \nmid a$.

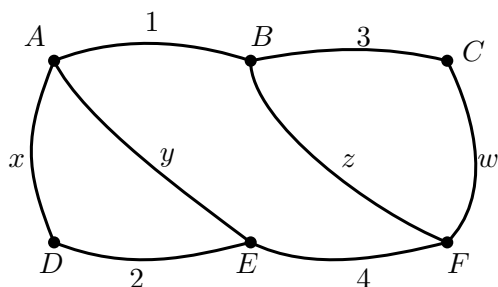
5. Relationer. För binära relationer har vi studerat egenskaperna reflexivitet, symmetri, antisymmetri och transitivitet i kursen. Vi inför nu en femte egenskap hos binära relationer, vi kallar en binär relation $\mathcal{R}$ på en mängd A för *Euklidisk* om

$$\forall x, y, z \in A : x\mathcal{R}y \wedge x\mathcal{R}z \Rightarrow y\mathcal{R}z.$$

Visa att en euklidisk relation som är reflexiv också är en ekvivalensrelation.

6. Fördjupad talteori. Visa, med matematisk induktion, utan kongruensräkning, att talet $n^3 + 2n$ alltid är delbart med 3 för alla positiva heltal n ($\neq 0$).

7. Grafteori. Betrakta nedanstående graf.



Som synes har grafen 6 hörn benämnda A, B, C, D, E, F och 8 kanter med vikter $1, 2, 3, 4, x, y, z, w$. Vi antar att x, y, z, w är positiva heltal.

- Ta fram en uppsättning vikter x, y, z, w , som gör så att det finns fyra alternativa kortaste vägar från A till F och att dessa fyra kortaste vägar har den gemensamma kostnaden 10.
- För dessa värden på x, y, z, w , ange ett minsta uppspännande träd för grafen och ange dess vikt. (Du behöver inte redovisa i detalj hur du finner detta minsta uppspännande träd.)

8. Kombinatorik. Vi har ett kvadratisk rutnät av $4 \times 4 = 16$ rutor. Säg att vi börjar i nedre hörnet till vänster och vill röra oss upp till övre högra hörnet, genom en sekvens av förflyttningar till angränsande ruta där vi **bara är tillåtna att ta ett steg upp eller ett steg till höger**. En sådan sekvens skulle kunna visualiseras på följande sätt.

			X
		X	X
		X	
X	X	X	

- Beräkna antalet olika sekvenser som tar oss enligt ovanstående regler från nedre vänstra rutan till övre högra rutan
- Generalisera ditt resultat och bestäm antalet olika sekvenser i ett rutnät av storlek $n \times m$, där n och m är heltal.

Ledning: Betrakta sekvensen av förflyttningar som följd av bokstäver: $UUHHUH\dots$ där U betyder förflyttning upp och H förflyttning till höger.

9. Sannolikhetslära. Låt A, B, C vara tre händelser som uppfyller följande:

- $P(A) = P(B) = P(C) = 0.4$.
- A, B är oberoende.
- $P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0.18$.
- $P(A \cap B \cap C) = 0.08$.

Beräkna $P(A \cup B \cup C)$. Även fast miniräknare inte är tillåten så går det utmärkt att räkna fram ett resultat så det krävs att du svarar med ett tal.