



TENTAMEN CM1000, APRIL 2021

Tillåtna hjälpmedel: Ett A4-papper med egna *handskrivna* anteckningar, anteckningar på båda sidorna är tillåtet. Inga datorutskriftar och inga miniräknare. Förstås inga smart watches eller andra elektroniska kommunikationsmedel. (I samband med pandemins särskilda omständigheter får ni dock ringa läraren på mobiltelefonen men ni får inte ringa eller kommunicera med någon annan.)

Skrivtid: Skrivtiden är 5 timmar, med början 9.00. Dock så sker inlämningen digitalt och för att hårbärga och lösa eventuella tekniska problem adderas en timme så att inlämning kan ske fram till och med 15.00. Det betyder inte att ni har extra skrivtid, den pålagda tiden ska användas till att ladda upp filer i den Canvas-quiz som skapats för tentan. Om ni gör detta under tentamens gång eller efter ni skrivit klart hela tentan är dock ert val. Observera att Canvas själv INTE kommer ge några påminnelser om detta, på Canvas ser det ut som om inlämningstiden är mycket senare, men det ska ni bortse ifrån. Skrivtiden *är* 5 timmar med inlämning fram till och med 15.00. Planera dock arbetet så att ni inte behandlar några uppgifter efter kl 14.30 utan säkert efter detta klockslag endast ägnar er åt uppladdning av era lösningar. För de med extra skrivtid kan man lämna in fram till och med 18.00 (och efter 17.30 ska ni inte ägna er åt något annat än att ladda upp filer). Det är dock *starkt* rekommenderat att ni lämnar in i mycket god tid eftersom gränsen 15.00 (respektive 18.00) är mycket skarp och kommer att sättas av systemet själv, inte av er klocka, inte av fröken ur, utan av *Canvas*. Så för att vara på säkra sidan, lämna in i ohyggligt god tid. Lösningar inlämnade för sent rättas inte.

Varning: När ni trycker på "Lämna in"/"Submit" så kan inga mer uppgifter laddas upp, var därför helt säker på att du laddat upp ALLT som ska lämnas in innan du trycker på "Lämna in"/"Submit".

Teknisk support: Om det skulle finnas tekniska problem (vilka som helst) som förhindrar inlämningen eller gör det svårt på något vis, *måste* ni kontakta mig i skrivningens tillhörande zoommöte. Det är endast i zoommötet som vi kan lösa problem, troligen genom att något slags alternativ inlämningsprocedur vidtas. Ni kan *inte* på egen hand besluta er för att eposta era lösningar.

DELAR

Tentamen har tre delar. Den första delen – Del I – består av nio problem som svarar mot kursens nio delområden. De problem som svarar mot delområden som tidigare är avklarade från kursens kontrollskrivningar behöver inte lösas. För lägsta godkända betyg (E) måste alla nio delområden vara avklarade. Den andra delen – Del II – består av ett problem för betyget C. Om ni uppfyller kraven för betyg E och klarar det problemet uppfyller ni kravet för betyg C. Den sista delen – Del III – består av ett problem för betyget A. Om ni uppfyller kraven för betyg C och klarar det problemet uppfyller ni kraven för betyg A. Betyg B respektive D reserveras för situationer där studenter försökt på högre betyg men inte riktigt nått fram. Ingen poängsättning sker, varje lösning är antingen helt rätt eller helt fel – dock bedöms inte lösningar som har slarvfel i sig som felaktiga om slarvfelet inte ändrar den logiska strukturen på problemställningen. Om ingenting annat sägs i uppgiften krävs *fullständiga* motiveringar för alla lösningar.

TILLGODORÄKNANDE

Om en uppgift som tillhör ett högre betyg löses korrekt och den uppgiften kan sägas *täcka* ett av de grundläggande nio delområdena, så kan lösningen av den uppgiften tillgodoräknas för det grundläggande delområde som täcks av högrebetygsuppgiften – det delområdet anses då avklarat. Det betyder att om ni misslyckas med en lösning av ett problem i Del I så kan ni ändå få det området avklarat om ni klarar av att lösa en motsvarande högrebetygsuppgift. I alla uppgifter för högre betyg anges vilken uppgift i Del I som de kan täcka. Om ni känner er osäkra på er lösning av någon uppgift i Del I kan ni också ge en lösning för en högrebetygsuppgift som täcker den uppgift ni är osäkra på.

Del I

1. Logik. Låt p, q, r representera godtyckliga utsagor och betrakta nedanstående tre generella utsagor. Var och en av dem är antingen sann för alla p, q, r eller inte. För de utsagor som är sanna för alla tilldelningar av sanningsvärden på p, q, r , bevisa dem (på valfritt sätt) och för alla utsagor som är falska, finn en tilldelning av sanningsvärden till p, q, r som visar att de inte är sanna.

1. $\neg p \rightarrow \neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge q)$
2. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$
3. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p) \Leftrightarrow \neg((p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r))$

2. Mängdlära. Visa att två mängder A, B är disjunkta precis då unionen av A och B är lika med den symmetriska differensen av A och B . Venndiagram får *inte* användas. (Symmetrisk differens mellan A och B är $(A - B) \cup (B - A)$.)

3. Funktioner. Låt funktionerna f, g vara givna som reellvärda funktioner definierade i hela $\mathbb{R}$ genom

$$f(x) = x^2 - 1 \quad g(x) = ax + b$$

där a, b är konstanta reella tal. Ange alla möjliga val av a, b som gör att $f \circ g = g \circ f$. (Ledning: det finns tre sådana val.)

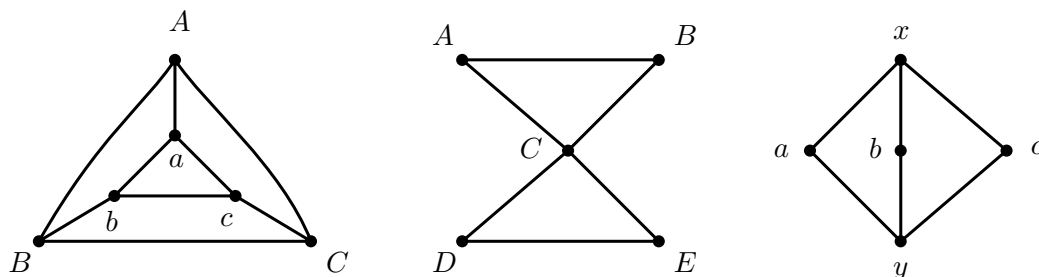
4. Inledande talteori. Betrakta funktionen $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ given av $g(n, m) = 2n + 3m$. Visa att funktionen är surjektiv men inte injektiv.

5. Relationer. Låt S vara mängden av alla räta linjer i planet och låt $\mathcal{R}$ vara en relation på S där $l_1 \mathcal{R} l_2$ om och endast om linjerna l_1, l_2 är ortogonala (alltså att skalärprodukten mellan linjernas riktningsvektorer är 0). Vilka av egenskaperna *reflexivitet*, *transitivitet*, *symmetri* och *antisymmetri* har denna relation? Bevisa dina påståenden genom att basera ditt resonemang på linjernas riktningsvektorer.

6. Fördjupad talteori. Talet 171 är delbart med 3, eftersom $171 = 3 \cdot 57$. Observera att summan av siffrorna i talet är $1 + 7 + 1 = 9$, också delbar med 3. Ett annat exempel är talet $20163 = 3 \cdot 6721$, där summan av siffrorna i talet är $2 + 0 + 1 + 6 + 3 = 12$, igen delbar med 3. Det visar sig faktiskt att ett tal n är delbart med 3 om och endast om summan av siffrorna i n är delbar med 3. Bevisa detta påstående för positiva heltal (> 0) genom räkning med restklasser modulo 3! Observera att det är en ekvivalens du ska visa, alltså att om σ_n betecknar siffersumman i talet n (som är positivt) så ska du visa

$$\sigma_n \equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{3}.$$

7. Grafteori. Betrakta nedanstående tre grafer:



För varje graf, ange om grafen har en hamiltoncykel eller inte. Om grafen har en hamiltoncykel, ange den genom att räkna upp ordningen på hörnen i hamiltoncykeln. Om grafen inte har en hamiltoncykel, presentera ett argument som motiverar att ingen hamiltoncykel finns. Använd de beteckningar på hörnen som är angivna i presentationen av graferna ovan.

8. Kombinatorik. Hos en bilförsäljare finns 12 bilar med tre olika egenskaper: gamla bilar, röda bilar och elbilar. Av någon anledning (som kanske har med tentamenskonstruktion att göra) tycker bilförsäljaren väldigt mycket om just röda bilar. En bil kan inte vara både elbil och gammal. 5 av bilarna är gamla, 5 är röda och 5 är elbilar. Det finns bara en röd elbil. Hur många gamla röda bilar finns det hos bilförsäljaren?

9. Sannolikhetslära. Två urnor U_1 och U_2 innehåller vardera tre kulor. U_1 innehåller två vita och en svart medan U_2 innehåller två svarta och en vit. En slumpvis vald kula flyttas från U_2 till U_1 . Kulorna i U_1 blandas och därefter dras en slumpvis vald kula från U_1 . Vad är sannolikheten att den dragna kulan är vit?

DEL II

10. För betyget C. Kan också täcka delområde 5, *Relationer*.

I datoralgebrasystem används en abstrakt algebraisk teori för så kallade *Gröbnerbaser*. I teorin har man behov av användning av speciella typer av relationer på *monom*. Ett *monom* i två variabler x, y är ett uttryck på formen $x^n y^m$, där n och m är heltal ≥ 0 .

Låt $\mathcal{R}$ vara relationen på mängden av monom i två variabler given av

$$x^{n_1} y^{m_1} \mathcal{R} x^{n_2} y^{m_2} \iff n_1 < n_2 \text{ eller } (n_1 = n_2 \text{ och } m_1 \leq m_2).$$

Visa att denna relation är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

DEL III

11. För betyget A. Kan också täcka delområde 9, *Sannolikhetslära*

I nyheterna rapporterades det för ett tag sedan om en så kallad *fas-3* studie av ett experimentellt vaccin mot COVID-19. I rapporten angavs att ett stort antal människor (43538) ingått i studien där hälften fick det experimentella vaccinet och hälften fick ett icke verksamt preparat (ett så kallat placebo). Totalt i hela populationen smittades 94 människor av COVID-19 varav de flesta var i den icke-vaccinerade gruppen. Företaget som gjorde studien hävdar att studien visar att vaccinet är minst 90% effektivt vilket vi för denna uppgifts del kan anta uttrycker sig som att sannolikheten att få COVID-19 om man är vaccinerad är max 10% av sannolikheten att få COVID-19 om man inte är vaccinerad. Sannolikheten att få COVID-19 ska alltså gå ner 90% tack vare vaccinering.

Beräkna, med dessa tolkningar, maximala antalet vaccinerade personer som kunde vara smittade av COVID-19 bland de som var vaccinerade för att vi ska kunna dra slutsatsen att vaccinet har en 90%-ig effektivitet.