



FX-SKRIVNING 1 HT2020, DEN 12 FEBRUARI 2021

Tillåtna hjälpmedel: Ett A4-papper med egna *handskrivna* anteckningar, anteckningar på båda sidorna är tillåtet. Inga datorutskriftar och inga miniräknare. Förstås inga smart watches eller andra elektroniska kommunikationsmedel. (I samband med pandemins särskilda omständigheter får ni dock ringa läraren på mobiltelefonen men ni får inte ringa eller kommunicera med någon annan.)

Skrivtid: Skrivtiden är 1 timme och 45 minuter, med början 13.30. Dock så sker inlämningen digitalt och för att härbärgera och lösa eventuella tekniska problem adderas en cirka 30 minuter (15 minuter före och 15 minuter efter) så att inlämning kan ske fram till och med 15.30 och själva skrivningen publiceras omkring kl 13.15. Det betyder inte att ni har extra skrivtid, den pålagda tiden ska användas till att ladda upp filer i den Canvas-quiz som skapats för tentan. Om ni gör detta under skrivningens gång eller efter ni skrivit klart hela skrivningen är dock ert val. Observera att Canvas själv INTE kommer ge några påminnelser om detta, på Canvas ser det ut som om inlämningstiden är mycket senare, men det ska ni bortse ifrån. Skrivtiden *är* 1:45 med inlämning fram till och med 15.30. Planera dock arbetet så att ni inte behandlar några uppgifter efter kl 15.15 utan säkert efter detta klockslag endast ägnar er åt uppladdning av era lösningar. För de med extra skrivtid kan man lämna in fram till och med 16.30 (och efter 16.15 ska ni inte ägna er åt något annat än att ladda upp filer). Det är dock *starkt* rekommenderat att ni lämnar in i mycket god tid eftersom gränsen 15.30 (respektive 16.30) är mycket skarp och kommer att sättas av systemet själv, inte av er klocka, inte av fröken ur, utan av *Canvas*. Så för att vara på säkra sidan, lämna in i mycket god tid. Lösningar inlämnade för sent rättas inte.

Varning: När ni trycker på "Lämna in"/"Submit" så kan inga mer uppgifter laddas upp, var därför helt säker på att du laddat upp ALLT som ska lämnas in innan du trycker på "Lämna in"/"Submit".

Teknisk support: Om det skulle finnas tekniska problem (vilka som helst) som förhindrar inlämningen eller gör det svårt på något vis, *måste* ni kontakta mig i skrivningens tillhörande zoommöte. Det är endast i zoommötet som vi kan lösa problem, troligen genom att något slags alternativ inlämningsprocedur vidtas. Ni kan *inte* på egen hand besluta er för att eposta era lösningar.

1. Logik. Låt utsagorna p, q, u, v vara givna. Visa (på valfritt sätt) att

$$(\neg p \rightarrow u) \wedge (\neg q \rightarrow v) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (u \wedge q) \vee (p \wedge v) \vee (u \wedge v).$$

2. Mängdlära. Sätt $M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ och avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Inga motiveringar behövs men du behöver ha *alla* rätt för att uppgiften ska vara godkänd. ($\subset$ står som vanligt för delmängdsrelationen.)

- (a) $\emptyset \subset M$,
- (b) $\{\emptyset\} \subset M$,
- (c) $\{\{\emptyset\}\} \subset M$,
- (d) $\emptyset \in M$,
- (e) $\{\emptyset\} \in M$,
- (f) $\{\{\emptyset\}\} \in M$.

3. Funktioner. Om $f : A \rightarrow B$ och $E \subset A$ så definieras $f(E)$ som mängden

$$f(E) = \{y \in B : \exists x \in E : y = f(x)\}.$$

Om f är injektiv och $E, F \subset A$, visa att vi alltid har

$$f(E) \cap f(F) = f(E \cap F).$$

4. Inledande talteori. Använd Euklides utvidgade algoritm för att finna alla heltal x som uppfyller

$$19x \equiv 17 \pmod{34}.$$

(Reducera ditt svar modulo 34.)

5. Relationer. Avgör vilka av följande relationer $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}$ som också kan uppfattas som funktioner från en mängd $A \subset \mathbb{Z}$ till $\mathbb{Z}$:

- (a) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy = 1$
- (b) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy = 0$
- (c) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y = 1$
- (d) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \neq 1$
- (e) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

För de $\mathcal{R}$ som är funktioner ange största möjliga definitionsmängd $-A$, för de $\mathcal{R}$ som inte kan uppfattas som funktioner, ge exempel på element $(x, y_1) \in \mathcal{R}$ och $(x, y_2) \in \mathcal{R}$ där $y_1 \neq y_2$ som alltså visar att $\mathcal{R}$ inte är en funktion. *(Lösningen är godkänd även om du missar en av dessa, men minst fyra måste vara rätt för att lösningen ska vara godkänd. Var extra noggrann med att minnas att du bara arbetar med heltal!)*

6. Fördjupad talteori. Låt talet a vara vilket tal som helst och bilda matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Låt M^n beteckna matrisen som uppstår genom multiplikation av n stycken M -matriser ($M^n = M \cdot M \cdot \dots \cdot M$) där $n \geq 1$ är ett heltal. Gissa en formel för M^n och bevisa den med matematisk induktion. (Alltså $M^n = \dots$)

7. Grafteori. Låt $G = (V, E)$ vara den fullständiga grafen (samtliga möjliga kanter ingår) med n hörn. Bestäm det antal kanter som ska tas bort för att vi ska få ett uppspännande träd. Verifiera att ditt svar stämmer för $n = 1$ och $n = 2$ (det vill säga ange antalet kanter som ska tas bort från den fullständiga grafen då antal hörn är lika med 1 respektive 2 baserat på din formel).

8. Kombinatorik. Låt mängderna A, B, C vara givna med följande egenskaper:

1. A, B, C har alla samma antal element,
2. $|A \cup B \cup C| = 6$,
3. $|A \cap B| = |B \cap C| = |A \cap C| = 1$.
4. Det finns inga element som ligger i alla tre mängderna.

Beräkna antalet element i A . (Venndiagram får inte användas.)

9. Sannolikhetslära. Vi antar att vi har tre olika sjukdomar, S_1, S_2, S_3 där ett speciellt symtom A uppträder. Sannolikheten för att en patient ska ha sjukdomarna S_1, S_2, S_3 är 5%, 10%, respektive 5%. (Det är alltså ganska vanliga sjukdomar.) Vi gör också antagandet att en patient inte kan ha mer än en av dessa sjukdomar samtidigt. Sannolikheten att symtomet A uppträder vid sjukdomarna S_1, S_2, S_3 är 5%, 40%, respektive 90%. Symtomet A uppträder inte hos friska personer. En patient har symtomet A . Beräkna sannolikheten att patienten har sjukdomen S_2 .

Återigen, eftersom miniräknare inte är ett tillåtet hjälpmedel är det tillräckligt att teckna det numeriska uttrycket för svaret, du behöver alltså inte räkna ut precis vad det blir, men det ska vara korrekt och sättet som du kommer fram till uttrycket måste också vara korrekt.