

Kap. 6.5 Integration m.h.a. nivåkurvor.

Betrakta $\iint_D h(g(x,y)) dx dy$ där

- $g(x,y): D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ kvadrerbar,
 $g \in C^1(D)$

- $h: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ (funktion av en variabel)

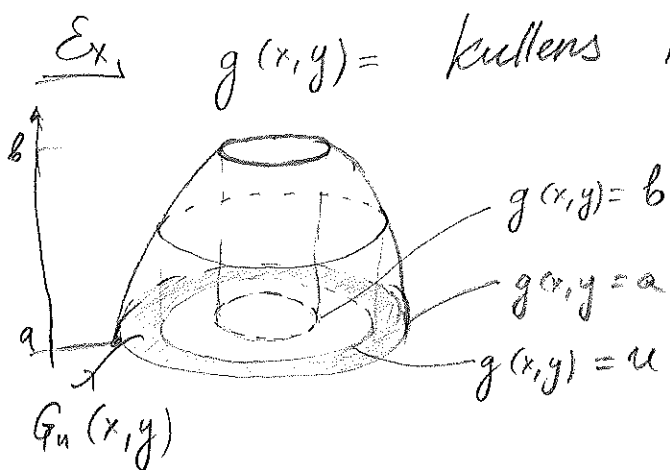
$$h \in C^1([a,b]), \quad a = \inf_{(x,y) \in D} g(x,y), \quad b = \sup_{(x,y) \in D} g(x,y)$$

(OBS: $h(g(x,y))$ är konstant på nivåkurvorna av $g(x,y)$)

- Areafunktionen $A: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ given av

$$A(u) = \mu(G_u) \text{ där } G_u = \{(x,y) \in D \mid g(x,y) \leq u\} \text{ är } C^1.$$

Då gäller: $\left[\iint_D h(g(x,y)) dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) du \right] (*)$



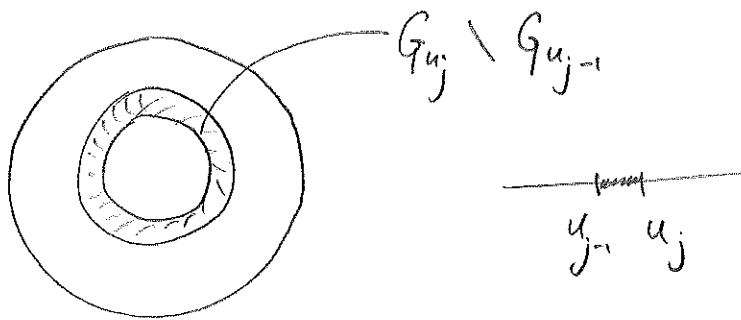
koncentrationen av något ämne i luften (som bara beror på höjden).

Nu vill vi veta hur mycket ämne totalt som finns över kullen, dvs. $\iint_D h(g(x,y)) dx dy$.

I stället kan man integrera h m.a.p. D höjden (från a till b). Men det behövs en viss omskallning.

Beweisidé av (*)

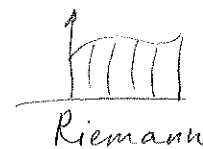
En indelning $a = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b$ av $[a,b]$ ger en indelning $D = \bigcup_j (G_{u_j} \setminus G_{u_{j-1}})$



Da $h(g(x, y)) \simeq h(u_j)$ för $G_{u_j} \setminus G_{u_{j-1}}$, får vi

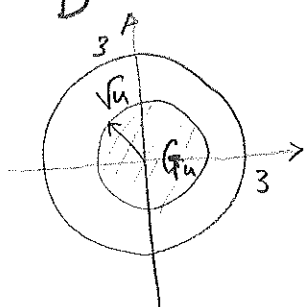
$$\begin{aligned} \iint_D h(g(x,y)) dx dy &\approx \sum_{j=1}^n h(u_j) \cdot (A(u_j) - A(u_{j-1})) \approx \\ \sum_{j=1}^n h(u_j) A'(u_j) \cdot (u_j - u_{j-1}) &\approx \int_a^b h(u) \cdot A'(u) du. \end{aligned}$$

Kommentar: Riemann vs. Lebesgue integration:



E_x D = {x² + y² ≤ 9}

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$$



$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(x) = (x, x^2)$$

$$u = g(x, y) = x^2 + y^2$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(u) = e^u$$

$$A(u) = \mu(G_u) = \pi u.$$

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \int_a^b h(u) A'(u) du = \int_0^g e^u \cdot \pi du =$$

D ingen prim.
funktion i termer av
elementära f.

$$= \left[\pi e^u \right]_0^g = \pi (e^g - 1).$$

Alternativ lösen. $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \left[\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right] =$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 e^{r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[\frac{e^{r^2}}{2} \right]_0^3 = \pi(e^9 - 1).$$